1

Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R$ 96,00, e unidades do produto B, pagando R$ 84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

Resolução

Sejam ***a*** *e* ***b*** *as quantidades dos produtos A e B, respectivamente, e (x + 2) e x, os preços, em reais, de cada unidade desses produtos.*

Das condições propostas, tem-se:

$$\begin{cases} a \cdot (x+2) = 96 \\ b \cdot x = 84 \\ a + b = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{96}{x+2} & (I) \\ b = \dfrac{84}{x} & (II) \\ \dfrac{96}{x+2} + \dfrac{84}{x} = 26 & (III) \end{cases}$$

Da equação (III), tem-se

$$\frac{96}{x+2} + \frac{84}{x} = 26 \Leftrightarrow 48x + 42(x+2) = 13x\,(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 64x - 84 = 0 \Leftrightarrow x = 6, \text{ pois } x > 0$$

Substituindo nas equações (I) e (II), conclui-se que a = 12 e b = 14. Foram adquiridos 12 produtos A, por R$ 8,00 cada um e 14 produtos B, por R$ 6,00 cada um.

Resposta: *12 unidades*

Diz-se que a matriz quadrada A tem posto 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de a, b e c para os quais a matriz 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \dfrac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

Resolução

*Para que a matriz quadrada A tenha **posto 1**, devemos ter:*

$$\begin{cases} \dfrac{3a - b + 2c}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{6}{3} \\ \dfrac{b + c - 3a}{2} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{c - 2a + b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ -3a + b + c = 2 \\ -2a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -3a + b + c = 2 \\ -2a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -3a + b + c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

***Resposta**: a = 1, b = 3 e c = 2*

Uma seqüência de números reais a_1, a_2, a_3, ... satisfaz à lei de formação

$$a_{n+1} = 6a_n \text{ , se n é ímpar}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \text{, se n é par.}$$

Sabendo-se que $a_1 = \sqrt{2}$,

a) escreva os oito primeiros termos da seqüência.

b) determine a_{37} e a_{38}.

Resolução

1) Se (a_n) é uma seqüência tal que

$$a_{n+1} = \begin{cases} 6\,a_n, \text{ se n é ímpar} \\ \dfrac{1}{3}\,a_n, \text{ se n é par} \end{cases}$$

então os termos de ordem ímpar formam uma progressão geométrica de razão 2 e os termos de ordem par formam outra progressão geométrica de razão 2, pois:

$$\left.\begin{array}{l} n = 2m - 1 \Rightarrow a_{2m} = 6a_{2m-1} \\ n = 2m \Rightarrow a_{2m+1} = \dfrac{1}{3}\,a_{2m} \\ n = 2m + 1 \Rightarrow a_{2m+2} = 6a_{2m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2m+2} = 2a_{2m} \\ a_{2m+1} = 2a_{2m-1} \end{cases} \text{, com } m \in \mathbb{N}^*$$

2) Para $n = 1 \Rightarrow a_2 = 6a_1 \Rightarrow a_2 = 6\sqrt{2}$

3) A seqüência (a_n) é $(\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 24\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 48\sqrt{2}, \ldots)$

4) a_{37} de (a_n) é o décimo nono termo de $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots)$, ou seja, $\sqrt{2} \,.\, 2^{18} = 2^{\frac{37}{2}}$

5) a_{38} de (a_n) é o décimo nono termo de $(6\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 24\sqrt{2}, 48\sqrt{2}, \ldots)$, ou seja, $6\sqrt{2} \,.\, 2^{18} = 3 \,.\, 2^{\frac{39}{2}}$

Respostas:

a) Os 8 primeiros termos de (a_n) são
$\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $24\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$ e $48\sqrt{2}$.

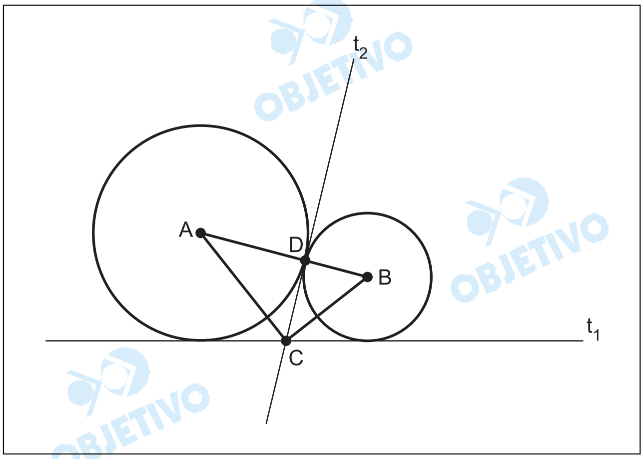
b) O termo de ordem 37 é $2^{\frac{37}{2}} = \sqrt{2^{37}}$.

O termo de ordem 38 é $3 \,.\, 2^{\frac{39}{2}} = 3\sqrt{2^{39}}$.

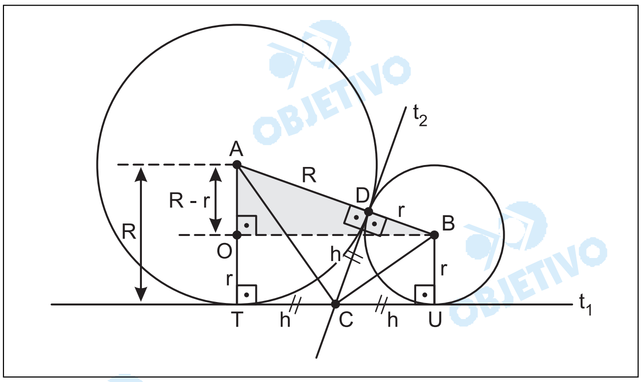
A figura representa duas circunferências de raios R e r com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D. Suponha que:

a) As retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C.

b) A reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.
Calcule a área do triângulo ABC, em função dos raios R e r.



Resolução



*Seja **h** = DC a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.*

No triângulo AOB, de acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \Leftrightarrow (R + r)^2 = (R - r)^2 + (2h)^2 \Leftrightarrow$

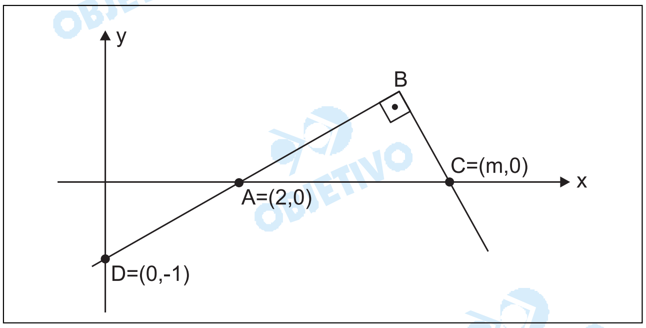
$\Leftrightarrow 4Rr = 4h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{Rr}$

Assim, a área S do triângulo ABC é dada por:

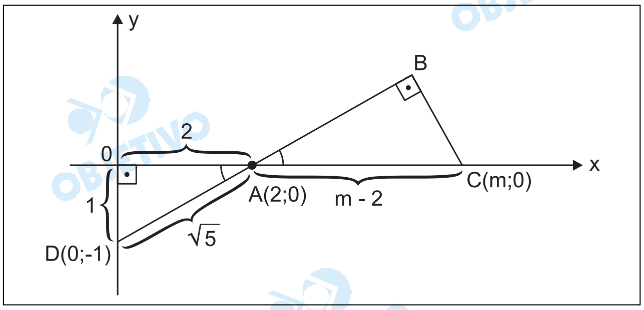
$$S = \frac{AB \,.\, h}{2} \Leftrightarrow S = \frac{(R + r)\sqrt{Rr}}{2}$$

Resposta: $\dfrac{(R + r)\sqrt{Rr}}{2}$

Na figura abaixo A, B e D são colineares e o valor da abscissa m do ponto C é positivo. Sabendo-se que a área do triângulo retângulo ABC é $\frac{5}{2}$, determine o valor de m.



Resolução



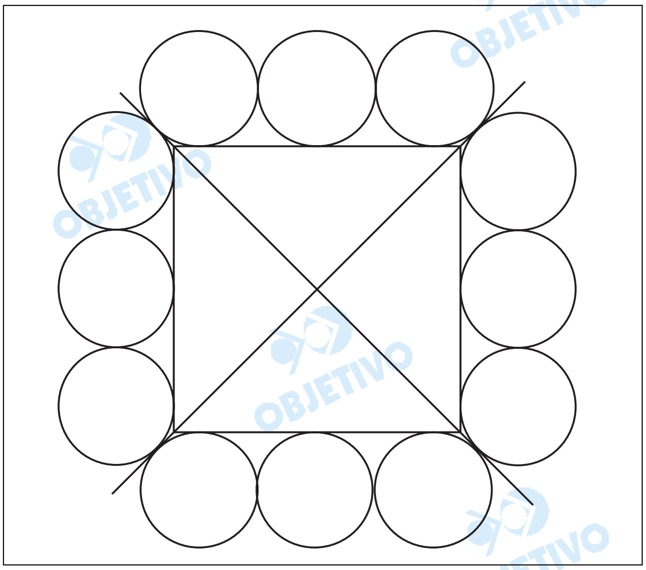
Pela figura, temos $\Delta ABC \sim \Delta AOD$*, então:*

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta AOD}} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$$

$$\frac{5/2}{1} = \left(\frac{m-2}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow (m-2)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

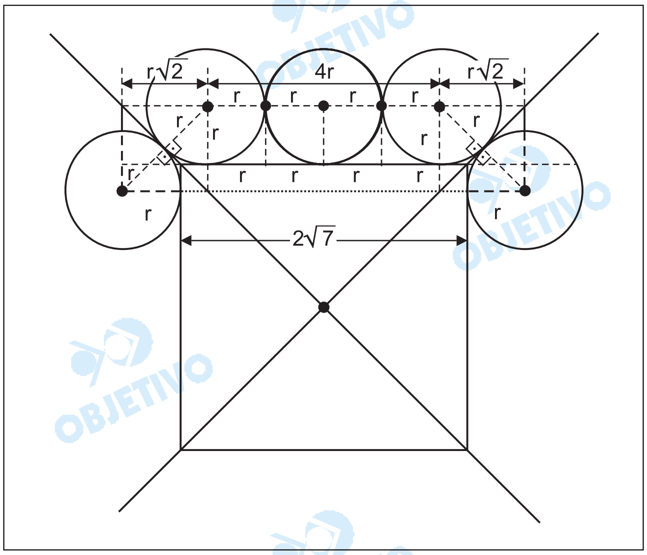
$$\Leftrightarrow m - 2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (pois } m > 0)$$

Resposta: $m = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$



Na figura acima, as 12 circunferências têm todas o mesmo raio r; cada uma é tangente a duas outras e ao quadrado. Sabendo-se que cada uma das retas suporte das diagonais do quadrado tangencia quatro das circunferências (ver figura), e que o quadrado tem lado $2\sqrt{7}$, determine r.

Resolução



De acordo com a figura acima, pode-se afirmar que:

$4r + 2r\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{7}$

Assim:

$$2r(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2} + 1} \Leftrightarrow r = \sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)$$

Resposta: $\sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)$

7

Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x.$$

Resolução

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x \Leftrightarrow (1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x$$

$$\Leftrightarrow 8\,\text{sen}^4 x - 6\text{sen}^2\,x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \;\text{ ou } \text{sen}^2\,x = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\text{ ou sen}\,x = \pm\frac{1}{2}$$

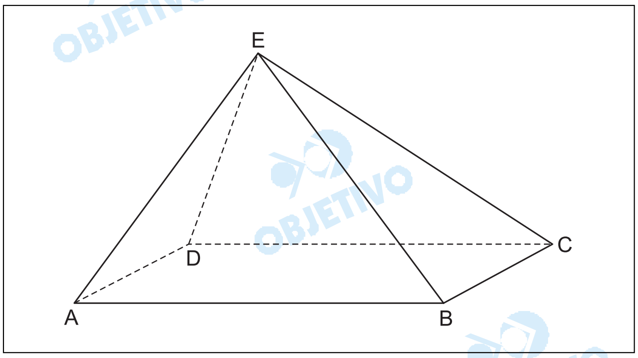
Os valores de x, $x \in [0; 2\pi]$ são:

$\pi/4$, $3\pi/4$ $5\pi/4$, $7\pi/4$, $\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$ e $11\pi/6$

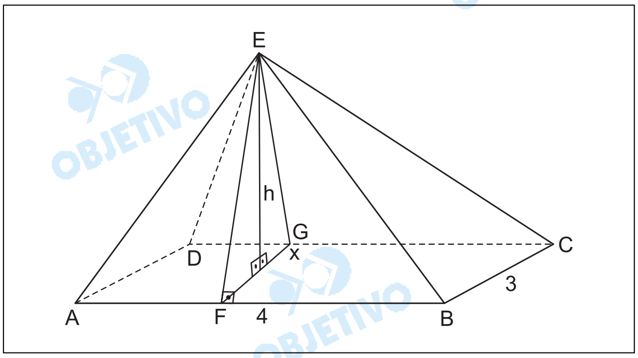
Resposta: $\pi/6$, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, $7\pi/6$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ e $11\pi/6$

A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados AB = 4 e BC = 3.

As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



Resolução



1) *A área do triângulo ABE é $4\sqrt{10}$ e assim a altura $\overline{FE}$ relativa ao lado $\overline{AB}$ desse triângulo é tal que:*

$$\frac{4 \,.\, FE}{2} = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow FE = 2\sqrt{10}$$

2) *A área do triângulo CDE é $2\sqrt{37}$ e assim a altura GE relativa ao lado DC desse triângulo é tal que:*

$$\frac{4 \,.\, GE}{2} = 2\sqrt{37} \Leftrightarrow GE = \sqrt{37}$$

3) *Sendo h a altura da pirâmide e também do triângulo EFG, em relação ao lado $\overline{FG}$ e x a projeção ortogonal de $\overline{GE}$ sobre $\overline{FG}$, tem-se:*

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 37 \\ h^2 + (3 - x)^2 = 40 \end{cases}$$

Assim: x = 1 e, portanto: $h^2 + 1^2 = 37 \Leftrightarrow h = 6$

4) *O volume V da pirâmide é dado por um terço do produto da área do retângulo ABCD pela altura h.*

Assim: $V = \frac{1}{3} \,.\, (4 \,.\, 3) \,.\, 6 \Leftrightarrow V = 24$

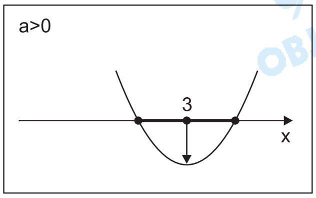
Resposta: *24 unidades de volume*

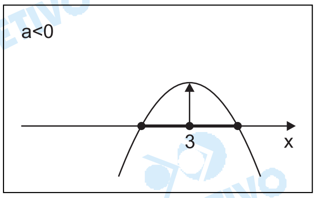
Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)\,x + 1$, onde a é um número real diferente de zero.

Determine os valores de a para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

Resolução

*A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + (1 - a) \,.\, x + 1$, com $a \neq 0$, deve ter raízes reais, e o número **3** deve pertencer ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.*





Assim sendo:

$a \,.\, f(3) \leq 0 \;\; e \;\; a \neq 0 \Rightarrow$

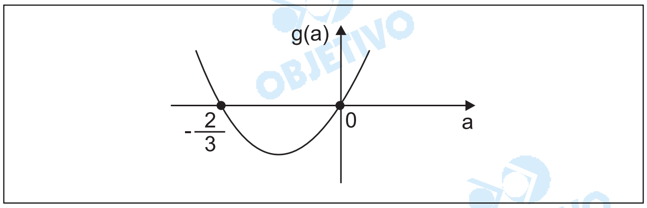
$\Rightarrow a \,.\, [a \,.\, 3^2 + (1 - a) \,.\, 3 + 1] \leq 0 \;\; e \;\; a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(9a + 3 - 3a + 1) \leq 0 \;\; e \;\; a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(6a + 4) \leq 0 \;\; e \;\; a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(3a + 2) \leq 0 \; e \;\; a \neq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \leq a < 0,$

pois o gráfico de $g(a) = a(3a + 2)$ é do tipo



Resposta: $-\dfrac{2}{3} \leq a < 0$

Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos.

Resolução

Supondo que o dado honesto tenha seis faces e os seis números dessas faces sejam diferentes, temos:

1) *A probabilidade de se obter dois números iguais no lançamento de 2 dados é* $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ *e a de se obter dois números diferentes é* $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

2) *Se os dois primeiros números forem iguais, a probabilidade de os dois últimos números serem diferentes dos dois primeiros é* $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

3) *Se os dois primeiros números forem diferentes, a probabilidade de os dois últimos números serem diferentes dos dois primeiros é* $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$.

4) *A probabilidade pedida é, portanto,*

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} \cdot \frac{16}{36} = \frac{25 + 80}{216} = \frac{105}{216} = \frac{35}{72}$$

Resposta: $\frac{35}{72}$

Comentário

Com cinco questões de álgebra, três de geometria, uma de trigonometria e uma de geometria analítica, a banca examinadora elaborou uma excelente prova de Matemática, na qual podemos destacar a clareza e a precisão dos enunciados, o equilíbrio quanto ao grau de dificuldade dos exercícios e a originalidade de algumas questões, tais como as de geometria e a de probabilidade.