1

João e Tereza estão saindo de uma festa ao mesmo tempo e ambos desejam pegar um táxi para voltar para casa. Consultando seus aplicativos, Tereza descobre que seu táxi custará R$ 24,00 e João é informado que seu táxi custará R$ 36,00. Como o caminho até a casa de João passa em frente à casa de Tereza, eles resolvem dividir um mesmo táxi e combinam a divisão do preço da corrida mais longa. O acordo é que o valor da corrida única será dividido proporcionalmente ao que cada um gastaria, caso fizessem corridas individuais. O valor, em reais, que Tereza tem que pagar para cumprir o acordo é

a) 20,00

b) 12,50

c) 21,10

d) 18,00

e) 14,40

Resolução

Sejam x e y, os valores reais que Tereza e João vão pagar, respectivamente, cumprindo o acordo, assim

$$\begin{cases} \dfrac{x}{24} = \dfrac{y}{36} & (1) \\ x + y = 36 & (2) \end{cases}$$

Da equação (1) $\dfrac{x}{24} = \dfrac{y}{36} = \dfrac{x+y}{24+36} = \dfrac{36}{60} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{36}{60} \Leftrightarrow x = 14{,}40$$

Resposta: E

Um círculo e um quadrado são desenhados em um plano, de modo que tenham uma parte sobreposta. A área da região do plano coberta pelas figuras é 351 cm^2 e a parte sobreposta tem área igual a 73 cm^2. A área do círculo é 255 cm^2. O perímetro do quadrado, em cm, é

a) 52

b) 51

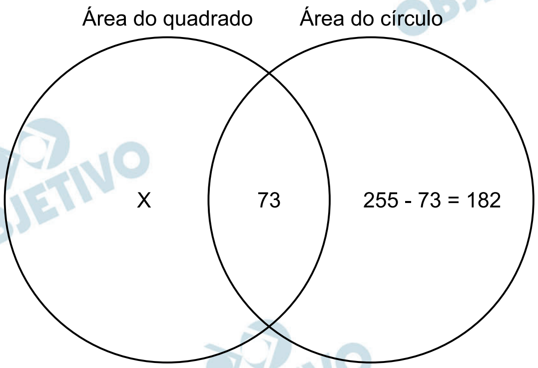
c) 48

d) 73

e) 72

Resolução

A partir do enunciado podemos representar diagramas que indicam as áreas, em cm^2, do quadrado de lado ℓ ou do círculo de raio R.



1) **Sendo x a área da região do quadrado que não está sobreposta, tem-se:**
   $x + 73 + 182 = 351 \Leftrightarrow x = 96$

2) **A área do quadrado é $x + 73 = 96 + 73 = 169$**

3) **Assim, $\ell^2 = 169 \Rightarrow \ell = 13$ e o perímetro, em cm, do quadrado é $4\ell = 4 . 13 = 52$**

Resposta: A

Ana, Beatriz e Clara pensam, cada uma, em um número racional. O número pensado por Ana é um a mais do que o triplo do número pensado por Beatriz. O número pensado por Beatriz é dois a menos do que o dobro do número pensado por Clara. O número pensado por Clara é dois a mais do que a metade do número pensado por Ana.

A soma dos três números pensados por elas é

a) 10 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{-19}{4}$

d) $\frac{-13}{2}$ e) –3

Resolução

Sejam a, b e c os números pensados por Ana, Beatriz e Clara, respectivamente.

$$\begin{cases} a = 3b + 1 \\ b = 2c - 2 \\ c = \dfrac{a}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b + 1 & (1) \\ b = 2c - 2 & (2) \\ 2c = a + 4 & (3) \end{cases}$$

1) (1) em (3)

$$2c = 3b + 1 + 4 \Leftrightarrow 2c = 3b + 5$$

2) (2)

$$b = (3b + 5) - 2 \Leftrightarrow -2b = 3 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}$$

3) (1)

$$a = 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2}$$

4) (3)

$$2c = -\frac{7}{2} + 4 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$$

5) $a + b + c = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{19}{4}$

Resposta: C

Um robô explorador de terreno foi programado para executar os seguintes passos:

(1) Ande x metros em frente, em linha reta.

(2) Colha uma amostra do terreno.

(3) Gire 90° para a esquerda.

(4) Modifique o valor de x para 2x.

(5) Volte para o passo (1) e repita a sequência de passos.

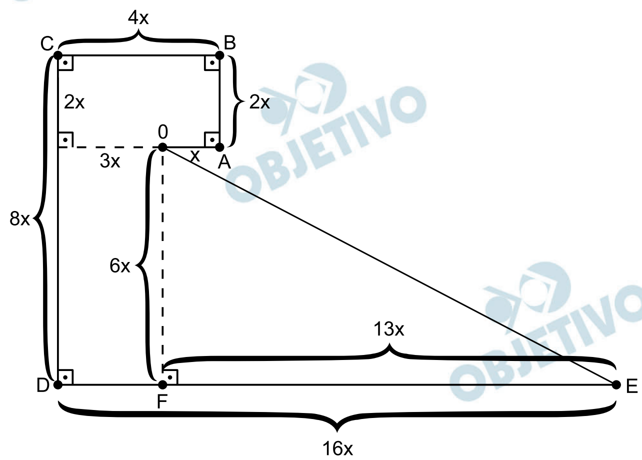
Antes de começar a exploração, o valor inicial de x é ajustado para 1. O robô inicia então sua exploração e, depois de colher 5 amostras do terreno, fica sem bateria e para. A distância, em metros, do ponto de partida ao de parada do robô situa-se entre

a) 21 e 22. b) 19 e 20. c) 15 e 16.

d) 17 e 18. e) 14 e 15.

Resolução

De acordo com o que foi programado, o robô parte do ponto O, e após colher 5 amostras passando pelos pontos A, B, C, D, e E ele para. A distância do ponto de partida ao ponto de parada ($\overline{OE}$) pode ser calculada a partir do triângulo retângulo OFE.



1) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OFE, segue que $OE^2 = (6x)^2 + (13x)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OE^2 = 205x^2$ e se $x = 1$, temos $OE = \sqrt{205}$

2) E como $\sqrt{196} < \sqrt{205} < \sqrt{225}$, então
$14 < OE < 15$.

Resposta: $\boxed{E}$

Kelvin desceu uma ladeira com seu skate, de tal modo que ele percorreu 30 cm no primeiro intervalo de um segundo e, a cada intervalo de um segundo subsequente, ele percorreu 40 cm a mais do que no intervalo de um segundo anterior.

Kelvin desceu a ladeira em 20 segundos.

A distância, em metros, que Kelvin percorreu nessa descida foi

a) 90

b) 88

c) 86

d) 84

e) 82

Resolução

As distâncias percorridas, em cm, a cada segundo formam a progressão aritmética (PA) de razão 40 e primeiro termo $a_1 = 30$.

$(30; 70; 110; a_{20}\ldots)$

1) **No vigésimo segundo Kelvin percorreu**
   $a_{20} = a_1 + 19 \,.\, R = 30 + 19 \,.\, 40 = 790$

2) **A distância, em cm, que Kelvin percorreu nessa descida em 20 segundos é a soma dos 20 termos dessa PA.**

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \,.\, 20}{2} = \frac{(30 + 790) \,.\, 20}{2} = 8200$$

3) **Em metros, temos 82.**

Resposta: $\boxed{E}$

Três amigas, Ana, Bete e Carla, costumam usar um jogo simples para decidir questões cotidianas. Nesse jogo, os participantes, ao sinal do "1,2,3, já!", apresentam suas mãos simultaneamente, que podem estar fechadas, indicando o número 0, ou podem estar com apenas o indicador aberto, indicando o número 1. Somam-se os três números apresentados e calcula-se o resto da divisão dessa soma por 3. A ganhadora do jogo de acordo com o resto é:

Resto 0 → Ana.

Resto 1 → Bete.

Resto 2 → Carla.

Suponha que cada jogadora escolha jogar 0 ou 1 ao acaso. A probabilidade de Ana ganhar o jogo é

a) 33%

b) 30%

c) 50%

d) 36%

e) 25%

Resolução

Os resultados possíveis são:
(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0) e (1, 1, 1)

Para que Ana ganhe o jogo é necessário que a soma dos três valores de cada sequência seja um múltiplo de 3 e assim os casos favoráveis são (0, 0, 0) e (1, 1, 1).

E a probabilidade é igual a $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$

Resposta: $\boxed{E}$

O terceiro ano do ensino médio de certa escola tem somente duas turmas, A e B. Em uma prova de matemática, os alunos da turma A tiveram média 9. Os alunos da turma B tiveram média 6. A média do terceiro ano foi 7.

A fração dos alunos do terceiro ano que pertencem à turma B é

a) 2/5

b) 3/4

c) 5/8

d) 2/3

e) 4/5

Resolução

Sejam S_a a soma das notas dos "a" alunos da turma A e S_b a soma das notas dos "b" alunos da turma B. Assim, de acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{S_a}{a} = 9 \quad \text{ou} \quad S_a = 9a \quad ① \\ \dfrac{S_b}{b} = 6 \quad \text{ou} \quad S_b = 6b \quad ② \\ \dfrac{S_a + S_b}{a + b} = 7 \quad ③ \end{cases}$$

Da equação 3, temos:

$$\frac{S_a + S_b}{a + b} = 7 \Rightarrow \frac{9a + 6b}{a + b} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a + 6b = 7a + 7b \Leftrightarrow b = 2a$$

Se o número de alunos da turma b é o dobro do número de alunos da turma a, concluímos que a fração dos alunos do terceiro ano que pertencem à turma B é

$$\frac{2}{3}.$$

Resposta: D

A longínqua estrela E tem os planetas A e B orbitando ao seu redor segundo circunferências perfeitas e concêntricas, com velocidades angulares constantes. As órbitas estão em um mesmo plano. Além disso, os planetas giram na mesma direção, ou seja, em certo desenho esquemático do sistema estelar, ambos os planetas giram no sentido horário.

Para dar uma volta completa em torno de E, o planeta A leva exatos 3 anos terrestres e o planeta B leva exatos 5 anos terrestres.

Os astrônomos do planeta B estão muito animados, pois neste momento, a sombra do planeta A está causando um eclipse estelar no planeta B. Isso quer dizer que os dois planetas e a estrela estão sobre uma mesma reta, com o planeta A entre a estrela E e o planeta B. O próximo eclipse estelar ocorrerá daqui a quantos anos terrestres?

a) 3

b) 7,5

c) 6

d) 5,5

e) 4,5

Resolução

Em 1 ano o planeta A percorre $\frac{1}{3}$ da circunferência (ano terrestre) e o planeta B percorre $\frac{1}{5}$ da circunferência (ano terrestre).

Seja t, o tempo, em anos terrestres, plara que o planeta A complete exatamente uma volta a mais que o planeta B.

$$\frac{1}{3} \cdot t - \frac{1}{5} \cdot t = 1 \Leftrightarrow \frac{5t - 3t}{15} = \frac{15}{15} \Leftrightarrow 2t = 15 \Leftrightarrow t = 7{,}5$$

Resposta: B

As avenidas de certa cidade são raios de uma circunferência que se encontram na praça central C da cidade. As ruas são transversais às avenidas e são circunferências com centro na praça central C.

Um motorista de aplicativo está posicionado no ponto A, cruzamento de uma rua com uma avenida, situado a 1 km da praça central. Ele recebe uma chamada para ir até o ponto B, cruzamento da mesma rua com outra avenida. O motorista pode ir até B diretamente pela rua onde ele está, percorrendo um arco de círculo, ou pode ir primeiro até a praça central C e depois seguir pela outra avenida até o ponto B. Ele consulta o aplicativo para saber qual desses percursos é o mais curto e o aplicativo informa que a distância em ambos os percursos é a mesma.

O ângulo $\widehat{ACB}$, em radianos, é

a) 1,9

b) 1,3

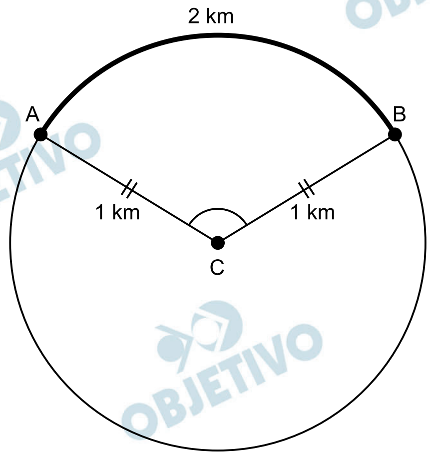
c) 1,5

d) 2,0

e) 2,1

Resolução

A partir das informações no enunciado e figura, temos:



Assim, o ângulo $A\hat{C}B$, em radianos, é $\dfrac{2\text{ km}}{1\text{ km}} = 2$

Resposta: D

10

Considere a lista de números 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, ... , 41, 41, ... , 41, na qual cada número ímpar positivo N, de 1 a 41, aparece N vezes.

A mediana dessa lista de números é

a) 23

b) 25

c) 27

d) 29

e) 31

Resolução

1) Ao todo são 1 + 3 + 5 + … + 41 elementos deste rol.

2) Seja a progressão aritmética (1; 3; 5; …; 41) onde a razão é igual a 2 e com n termos.
$41 = 1 + (n - 1) \,.\, 2 \Leftrightarrow n = 21$

3) Assim temos $\left[\dfrac{(1 + 41)\,.\,21}{2}\right] = 21^2 = 441$ elementos do rol apresentado no enunciado e a mediana vai ocupar a posição $\dfrac{441 + 1}{2} = 221$.

4) $(1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; \ldots; \underbrace{39; 39; \ldots 39}_{39}; \underbrace{41; \ldots; 41)}_{40}$

A partir da soma 41 + 49 + 37 + 35 + 33 + 31 = 216 termos e que 441 – 221 = 220, podemos afirmar que os 29 termos anteriores incluem o termo de ordem 221° e assim a mediana deste rol é 29.

Resposta: D