MATEMÁTICA

1

Seja M uma matriz real 2 x 2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2 x 2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

Resolução

1) Se M é uma matriz simétrica 2 x 2 então M é do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

Desta forma, $f(M) = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix}$ e

$$M^2 = f(M) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = b & \text{(I)} \\ ab + bc = a & \text{(II)} \\ ab + bc = c & \text{(III)} \\ b^2 + c^2 = b & \text{(IV)} \end{cases}$$

2) $\left.\begin{array}{l} \text{De (II) e (III) temos } a = c \\ \text{De (I) e (IV) temos } a^2 = c^2 \Rightarrow a = \pm c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = c}$

3) Substituindo em (II) resulta

$$ab + ba = a \Leftrightarrow 2\,ab - a = 0 \Leftrightarrow a\,(2b - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = \frac{1}{2}$$

4) Para a = 0 temos:

$0^2 + b^2 = b \Rightarrow b = 0$ **ou** $b = 1$ **e as matrizes são**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Para $b = \frac{1}{2}$ temos:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

e as matrizes são:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resposta: As matrizes M são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2

Resolva a inequação, onde $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4$$

Resolução

1) $1-\sqrt{3x+1} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

2) $\dfrac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2\left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2}{\left[1^2-\left(\sqrt{3x+1}\right)^2\right]^2} > 4 \Leftrightarrow \frac{9x^2\left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2}{(-3x)^2} > 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2 > 4 \Leftrightarrow 1+\sqrt{3x+1} < -2$ **ou**

$1+\sqrt{3x+1} > 2$

3) $1+\sqrt{3x+1} < -2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} < -3 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$,

pois $\sqrt{3x+1} \geq 0$

4) $1+\sqrt{3x+1} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 > 1^2 \Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$

3

Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3(\log_{\sqrt{3}} x) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

Resolução

1) **Condições de existência:**

a) $x > 0$ e $y > 0$

b) $\log_{\sqrt{3}} x > 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} x > \log_{\sqrt{3}} 1 \Leftrightarrow x > 1$

$\log_3 y > 0 \Leftrightarrow \log_3 y > \log_3 1 \Leftrightarrow y > 1$

Assim, devemos ter $\boxed{x > 1 \quad e \quad y > 1}$

2) $\log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(\log_3 y\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3\left(\log_3 y\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - 2\log_3\left(\log_3 y\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_3\left[\left(\log_3 y\right)^2\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\log_{\sqrt{3}} x}{(\log_3 y)^2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_{\sqrt{3}} x}{(\log_3 y)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} x = 3(\log_3 y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 x = 3(\log_3 y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\log_3 x = 3(\log_3 y)^2} \qquad \text{(I)}$$

3) $\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \Leftrightarrow \log_3\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = \log_3 3^{143} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_3\left(y\sqrt[3]{x}\right) = 143 \Leftrightarrow 2\left[\log_3 y + \log_3 x^{\frac{1}{3}}\right] = 143 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 y + \frac{2}{3}\log_3 x = 143 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{6\log_3 y + 2\log_3 x = 429} \qquad \text{(II)}$$

4) **Das equações (I) e (II), resulta:**

$6\log_3 y + 3(\log_3 y)^2 = 429 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_3 y)^2 + 2\log_3 y - 143 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 y = 11$ ou $\log_3 y = -13$ (que não serve, pois $y > 1$)

5) Para $\log_3 y = 11$ resulta $\boxed{y = 3^{11}}$ e

$2\log_3 x = 3\,.\,(11)^2 \Leftrightarrow \log_3 x = \dfrac{363}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3^{\frac{363}{2}} = 3^{181 + \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 3^{181}\,.\,\sqrt{3}}$

Resposta: $V = \{(3^{181}\,.\,\sqrt{3}\,;\,3^{11})\}$

4

Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m + 1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2\,(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

Resolução

1) O determinante do sistema é

$$D = \begin{vmatrix} (m-2) & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & (m+1) \end{vmatrix} =$$

$= (m-2)\,.\,m\,(m+1) + 8m - 4\,(m+1) + 2m^2 -$

$- 4\,(m+1) - 4\,(m+1)\,(m-2) \Leftrightarrow D = m^3 - 3m^2 + 2m$

$D = m^3 - 3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 1$ ou $m = 2$

2) Se $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$ o sistema é possível e determinado.

3) Se $m = 0$, o sistema fica:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

As matrizes incompleta e completa desse sistema são

$$MI = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$MC = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ tem características p e q tais que $p = q = 2 < 3$. O sistema é possível e indeterminado.

4) Se $m = 1$, o sistema fica:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Nestes casos $MI = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e

$$MC = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A característica de MI é $p = 2$, pois $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. A característica de MC é

$q = 3$, pois $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Assim, $p \neq q$ e o sistema é incompatível.

5) Se $m = 2$, o sistema fica:

$$\begin{cases} 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 6y + 3z = 11 \end{cases}$$

Da primeira e segunda equações, resulta:
$(2y - z) + 2\,.\,(2x + 2y + 2z) = 3 + 2\,.\,6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 6y + 3z = 15$, incompatível com a terceira equação.
O sistema é impossível.

Resposta:
Se $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$, o sistema é possível e determinado.
Se $m = 0$, o sistema é possível e indeterminado.
Se $m = 1$ ou $m = 2$, o sistema é impossível.

5

Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de a, b e c, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

Resolução

1) **Para z = a + bi e w = 47 + ci, temos:**

$$z^3 + w = (a + bi)^3 + (47 + ci) =$$
$$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i + 47 + ci =$$
$$= (a^3 - 3ab^2 + 47) + (3a^2b - b^3 + c)\,i$$

Como $z^3 + w = 0$, resulta:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 + 47 = 0 \\ 3a^2b - b^3 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,(3b^2 - a^2) = 47 & \text{(I)} \\ c = b^3 - 3a^2b & \text{(II)} \end{cases}$$

2) **Sendo a, b e c inteiros e positivos, e sendo 47 um número primo, da equação (I) devemos ter $\boxed{a = 1}$. Ainda da equação (I), resulta:**

$$1\,.\,(3b^2 - 1^2) = 47 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow \boxed{b = 4}, \text{ pois } b > 0$$

3) **Substituindo na equação (II), resulta:**

$$c = 4^3 - 3\,.\,1^2\,.\,4 \Rightarrow \boxed{c = 52}.$$

Resposta: a = 1, b = 4 e c = 52

6

Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto D(3,2) e seu circuncentro é o ponto E(55/18, 5/6). Determine:

- a equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
- as coordenadas dos vértices B e C.

Resolução

1) **Se o circuncentro é o ponto $E\left(\dfrac{55}{18}; \dfrac{5}{6}\right)$ e um dos vértices do triângulo é A (0, 0), o raio da circunferência circunscrita é**

$$R = \sqrt{\left(\frac{55}{18} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3025}{324} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{3250}{324}} = \frac{5\sqrt{130}}{18}$$

A equação dessa circunferência é

$$\left(x - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{3250}{324} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{55}{9}x + \frac{3025}{324} + y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36} =$$

$$= \frac{3250}{324} \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - \frac{55}{9}x - \frac{5}{3}y = 0}$$

2) a) **Seja $M_A\,(x_m; y_m)$ o ponto médio do lado BC. Pela propriedade do baricentro, temos: AD = 2DM. Assim,**

$$x_D - x_A = 2\,(x_M - x_D) \Rightarrow 3 - 0 = 2\,(x_M - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{9}{2}$$

De modo análogo

$$y_D - y_A = 2\,(y_M - y_D) \Leftrightarrow 2 - 0 = 2\,(y_M - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_M = 3$$

Desta forma, $M_A\left(\dfrac{9}{2}; 3\right)$

b) **A mediatriz (r) do lado $\overline{BC}$ é a reta $\overleftrightarrow{EM_A}$ e tem coeficiente angular:**

$$m_r = \frac{3 - \frac{5}{6}}{\frac{9}{2} - \frac{55}{18}} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{26}{18}} = \frac{3}{2}$$

A reta suporte do lado $\overline{BC}$ (s) é perpendicular à reta r e tem coeficiente angular

$$M_s = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

c) **A reta s passa por M e tem equação**

$$y - 3 = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow 3y - 9 = -2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x + 3y - 18 = 0}$$

d) **Os vértices B e C são as intersecções da reta S com a circunferência circunscrita.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{55}{9}x - \frac{5}{3}y = 0 & \text{(I)} \\ 2x + 3y - 18 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II) resulta $y = 6 - \dfrac{2x}{3}$

Substituindo na equação (I), temos:

$$x^2 + \left(6 - \frac{2x}{3}\right)^2 - \frac{55}{9}\,x - \frac{5}{3}\left(6 - \frac{2x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 36 - 8x + \frac{4x^2}{9} - \frac{55x}{9} - 10 + \frac{10x}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

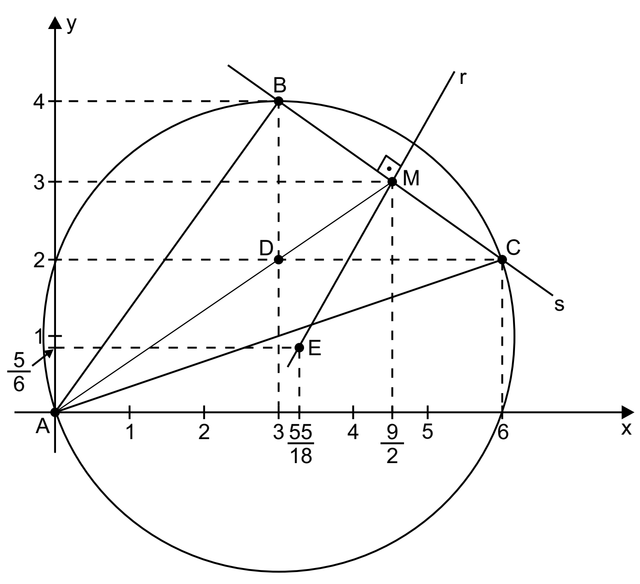
$$\Leftrightarrow 9x^2 + 324 - 72x + 4x^2 - 55x - 90 + 10x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 117x + 234 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 6$$

Para $x = 3$ tem-se $y = 6 - \dfrac{2 \,.\, 3}{3} = 4$

Para $x = 6$ tem-se $y = 6 - \dfrac{2 \,.\, 6}{3} = 2$



Resposta:

* **A equação da circunferência circunscrita é**
$x^2 + y^2 - \dfrac{55}{9}\,x - \dfrac{5}{3}\,y = 0$

* **As coordenadas dos vértices B e C são**
(3; 4) e (6; 2)

7

Se $\dfrac{\cos x}{\cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = -1$, calcule o valor S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} 3y}{\operatorname{sen} x}$$

Resolução

Lembrando que

$\operatorname{sen}(3y) = 3\operatorname{sen} y - 4\operatorname{sen}^3 y \Leftrightarrow 3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(3y) = 4\operatorname{sen}^3 y$ **e**

$\cos(3y) = 4\cos^3 y - 3\cos y \Leftrightarrow 3\cos y + \cos(3y) = 4\cos^3 y$

A expressão S é tal que

$$S = \frac{4\cos^3 y}{\cos x} + \frac{4\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{S}{4} = \frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x} \quad \text{(I)}$$

1) Da expressão $\dfrac{\cos x}{\cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = -1$ **resulta**

$$\frac{\cos y}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} y}{(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)}, \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x} = -\frac{\cos y}{(\cos x + \cos y)} \text{ e } \operatorname{sen}(x+y) = -\operatorname{sen} y \cdot \cos y$$

2) $$\frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x} = \cos^2 y \cdot \frac{\cos y}{\cos x} + \operatorname{sen}^2 y \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x} = \cos^2 y \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}\right) + \operatorname{sen}^2 y \left(-\frac{\cos y}{\cos x + \cos y}\right) =$$

$$= -\operatorname{sen} y \cdot \cos y \cdot \left(\frac{\cos y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y}\right) = -\operatorname{sen} y \cdot \cos y \cdot \left[\frac{\cos x \cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y}{(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)(\cos x + \cos y)}\right] =$$

$$= -\operatorname{sen} y \cdot \cos y \left[\frac{1 + \cos(x-y)}{(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)(\cos x + \cos y)}\right] =$$

$$= -\operatorname{sen} y \cdot \cos y \left[\frac{2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right] =$$

$$= -\operatorname{sen} y \cdot \cos y \left[\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right] = -\frac{\operatorname{sen} y \cdot \cos y}{\operatorname{sen}(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)} = 1$$

Assim, $\dfrac{\cos^3 y}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x} = 1$**, que susbstituído na expressão (I) resulta** $\dfrac{S}{4} = 1 \Leftrightarrow S = 4$

Observação: Pode-se obter S adotando um valor para y (por exemplo 45°) e, a partir da equação dada obter um valor para x (por exemplo 165°), mas isto não garante a unidade de S.

Resposta: S = 4

8

Seja A = {1, 2, 3, 4}.

- Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?
- Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

Resolução

I) 1) Existem $P_4 = 4! = 24$ funções cujo conjunto imagem tem 4 elementos.

2) Quando o conjunto imagem tem 3 elementos, dois elementos do domínio estão associados à mesma imagem. Existem $C_{4;2}$ formas de escolher estes elementos, 4 formas de escolher sua imagem e $A_{3;\,2}$ formas de associar os outros dois elementos, totalizando $C_{4;\,2} \,.\, 4 \,.\, A_{3;\,2} = 144$ funções.

3) Quando o conjunto imagem tem 2 elementos, existem as seguintes possibilidades:

3.1) O domínio possui dois grupos de dois elementos, cada um deles associado a uma imagem distinta.

Neste caso são $\dfrac{C_{4;\,2}}{2} \,.\, A_{4;\,2} = 36$ funções.

3.2) O domínio possui um grupo de três elementos associado a uma imagem e um elemento sozinho associado a outra imagem. Neste caso são $C_{4;\,3} \,.\, A_{4;\,2} = 48$ funções.

Desta forma existem 36 + 48 = 84 funções, cujo conjunto imagem possui 2 elementos.

4) Quando o conjunto imagem tem 1 só elemento, a função é constante e neste caso só existem 4 funções.

II) 1) Se o conjunto imagem de *g* tiver 4 elementos, *f* deverá ser constante e, portanto existem 24 x 4 = 96 funções fog constante.

2) Se o conjunto imagem de *g* tiver 3 elementos, a função *f* deverá associá-los a um único elemento e, neste caso, existem 144 x 4 x 4 = 2304 funções fog constantes.

3) Se o conjunto imagem de *g* tiver 2 elementos, a função *g* deverá associá-los a um só elemento e, neste caso, existem 84 x 4 x 4 x 4 = 5376 funções fog constantes.

4) Se o conjunto imagem de *g* tiver 1 só elemento, (for constante) a função *f* poderá ser qualquer e, neste caso, existem 4 x 256 = 1024 função fog constantes.

Ao lado são 96 + 2304 + 5376 + 1024 = 8800 funções fog constante e a probabilidade disso ocorrer é

$$P = \frac{\cancel{8800}}{256 \times \cancel{256}} = \frac{275}{256 \times 8} = \frac{275}{2048}$$

Respostas:

a) 84 funções f: A → A cujo conjunto imagem tem 2 elementos.

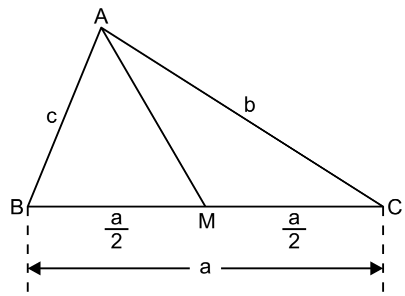
b) A probabilidade de fog ser constante é $\dfrac{275}{2048}$.

9

Em um triângulo ABC, a medida da bissetriz interna AD é a média geométrica entre as medidas dos segmentos BD e DC, e a medida da mediana AM é a média geométrica entre os lados AB e AC. Os pontos D e M estão sobre o lado BC de medida *a*. Pede-se determinar os lados AB e AC do triângulo ABC em função de *a*.

Resolução

1)



A figura $\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ e, conforme enunciado, é média geométrica entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, portanto $AM^2 = b \cdot c$.

Pela relação de Stewart, temos:

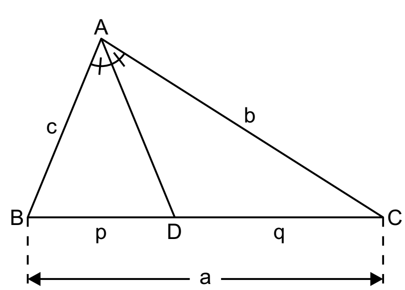
$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - bc \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 - 2bc = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow (b-c)^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b - c = \frac{a\sqrt{2}}{2}} \text{ (I), supondo } b > c$$

2)



Lembrando que o comprimento da bissetriz $\overline{AD}$ do ângulo interno $\hat{A}$ do triângulo ABC é dado por $AD = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bcp\,(p-a)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$, e, conforme enunciado $AD^2 = BD \cdot CD$, temos:

a) Pelo teorema da bissetriz,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{p}{c} = \frac{q}{b} = \frac{p+q}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{ac}{b+c} \text{ e } q = \frac{ab}{b+c}$$

Dessa forma,

$$AD^2 = BD \cdot CD = p \cdot q = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Leftrightarrow AD = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$$

b) Assim, $$\frac{a\sqrt{bc}}{b+c} = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bcp\,(p-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{p\,(p-a)} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)} = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b + c = a\sqrt{2}} \text{ (II), pois } b + c > 0$$

3) Das equações (I) e (II), resultam:

$$\begin{cases} b - c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ b + c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = a\sqrt{2} \\ 2b = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

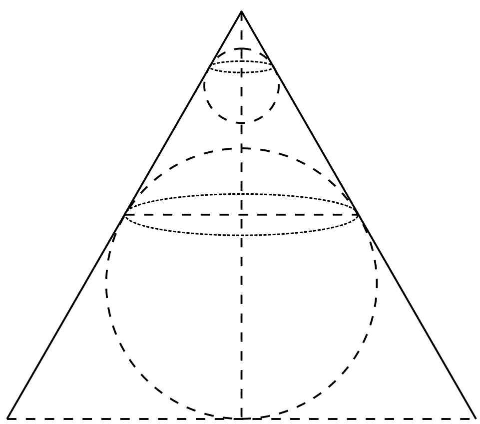
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4} \\ c = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Respostas: Supondo AC > AB, tem-se:

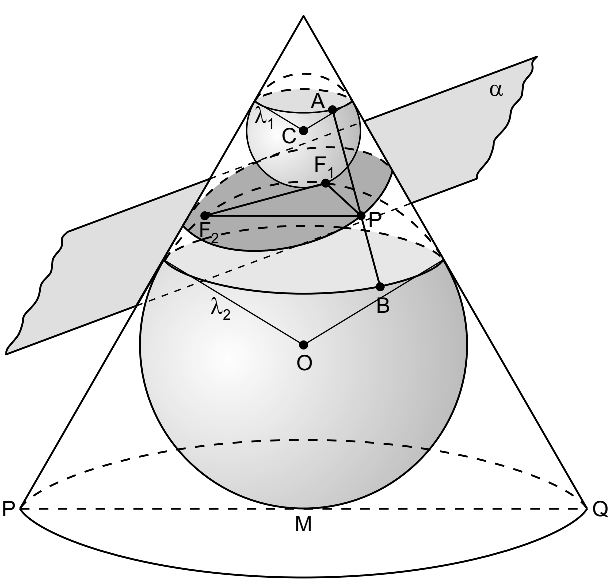
$$AB = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ e } AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

10

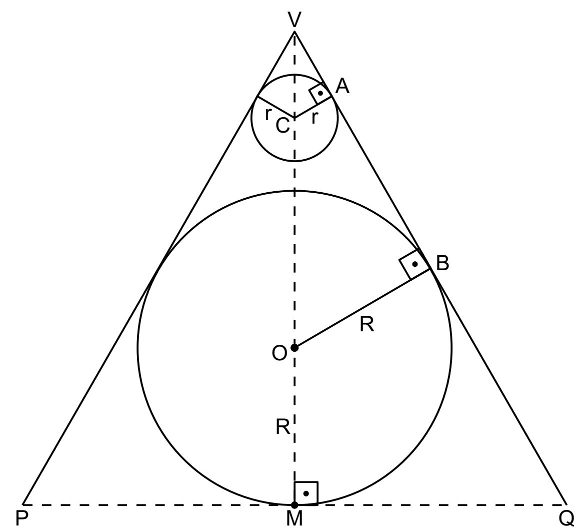
Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



Resolução



1) **Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência do plano secante com as esferas menor e maior, λ_1 e λ_2 as circunferências determinadas pelas tangências destas esferas com a superfície cônica A, B e P três pontos sobre uma mesma geratriz qualquer do cone, com $A \in \lambda_1$, $B \in \lambda_2$ e P pertencente ao plano secante.**
2) **Lembrando que por qualquer ponto externo a uma esfera dois segmentos tangentes são sempre congruos, temos: $PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB$. Como a distância de A até B é sempre constante, independente da geratriz considerada, o ponto P pertence a uma *elipse* de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior tem a mesma medida de $\overline{AB}$ (Teorema de Dandelin).**
3) **Desta forma, o maior segmento possível sobre a curva formada pela interseção do referido plano é o eixo maior da elipse e tem a mesma medida do segmento $\overline{AB}$ da demonstração anterior.**
4)



Considere O e C os centros das duas esferas.
No triângulo VAC, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{AC}{VA} = \frac{r}{VA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow VA = \sqrt{3}\,r = \sqrt{3}\,.\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)R =$$

$$= \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)R = \left(2\sqrt{3}-3\right)R$$

No triângulo VBO, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{BO}{VB} = \frac{R}{VB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow VB = R\sqrt{3}$$

Assim,

$$AB = VB - VA = R\sqrt{3} - \left(2\sqrt{3}-3\right)R = \left(3-\sqrt{3}\right)R$$

Resposta: $\left(3-\sqrt{3}\right)R$