Utilize as informações a seguir para as questões 1 e 2.

Os ingressos para a pré-estreia mundial de um filme começaram a ser vendidos 20 dias antes da exibição do filme, sendo que:

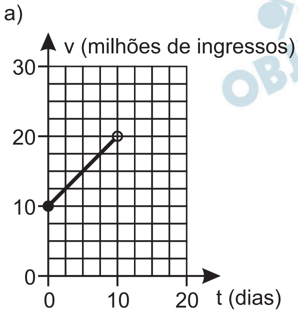
- nos 10 primeiros dias desse período, as vendas foram feitas exclusivamente nas bilheterias;
- nos dez últimos dias, as vendas ocorreram simultaneamente nas bilheterias e pela internet.

Considere que t representa o tempo, em dias, desde o início das vendas e v(t) o total de ingressos vendidos, em milhões, até o tempo t.

1

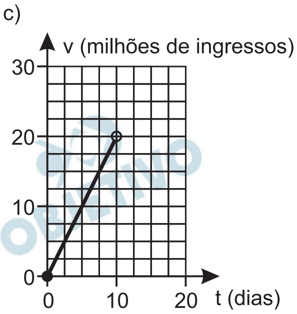
Durante as vendas exclusivas nas bilheterias, a capacidade de atendimento dos guichês dos cinemas do mundo todo, ao longo do tempo, era sempre a mesma, totalizando a venda de 2 milhões de ingressos por dia. Assim, o gráfico que melhor descreve v(t) para esse período, em função de t, é

a)

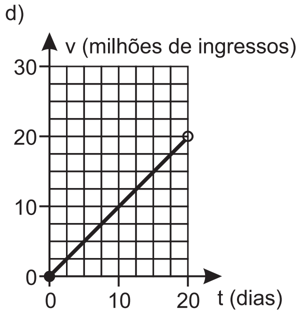


b)

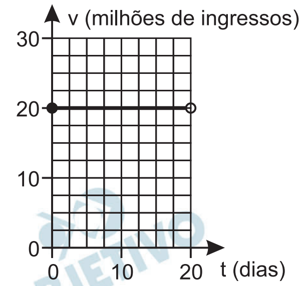
c)



d)

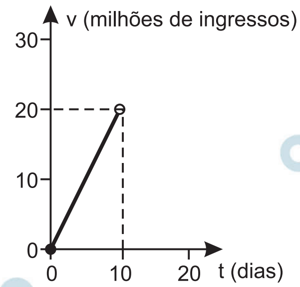


e)



Resolução

No instante t = 0 nenhum ingresso havia sido vendido. No instante t = 10 (dez dias), a um ritmo constante de 2 milhões de ingressos por dia, haviam sido vendidos 20 milhões de ingressos. O gráfico que melhor representa esta situação é



Resposta: C

No período de vendas simultâneas nas bilheterias e pela internet, a função v(t) é dada por:

$$v(t) = -0,1t^2 + 4t - 10.$$

O número de ingressos vendidos **apenas nos 10 dias que antecederam a exibição do filme** foi

a) 10 milhões.

b) 20 milhões.

c) 30 milhões.

d) 40 milhões.

e) 50 milhões.

Resolução

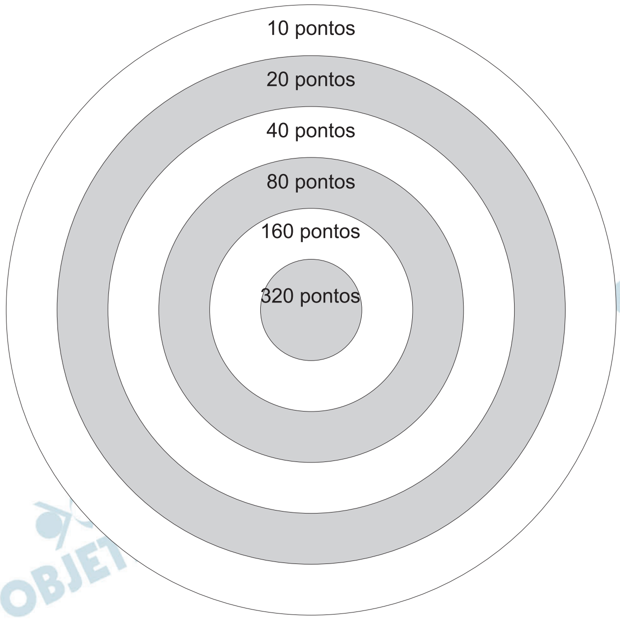
Dez dias após o início das vendas de ingressos, a quantidade de ingressos vendidos, em milhões, foi
$v(10) = -0,1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 - 10 = 20$
Vinte dias após o início das vendas de ingressos, a quantidade de ingressos vendidos, em milhões, foi
$v(20) = -0,1 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 - 10 = 30$

Desta forma, nos últimos dez dias, que antecederam a exibição do filme, o número de ingressos vendidos foi de 30 – 20 = 10 milhões.

Resposta: A

Utilize as informações a seguir para as questões 3 a 5.

A figura abaixo mostra o alvo de uma academia de arco e flecha. A pontuação que um jogador recebe ao acertar uma flecha em cada uma das faixas circulares está indicada na respectiva faixa. O raio do círculo maior mede 60 cm, o do menor mede 10 cm e a diferença entre os raios de quaisquer dois círculos consecutivos é de 10 cm. Todos os círculos têm o mesmo centro.



3

A soma das áreas das faixas em cinza na figura é igual a

a) 900π cm^2.

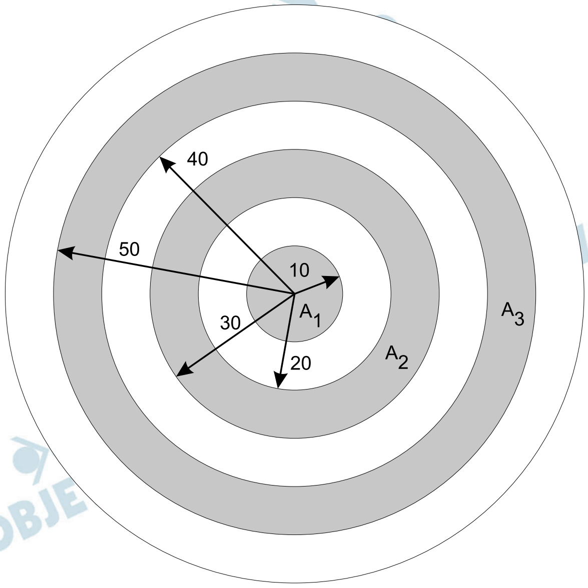
b) 1100π cm^2.

c) 1300π cm^2.

d) 1500π cm^2.

e) 1700π cm^2.

Resolução



Em cm^2, temos:

$A_1 = \pi \,.\, 10^2 = 100\pi$

$A_2 = \pi\,(30^2 - 20^2) = 500\pi$

$A_3 = \pi\,(50^2 - 40^2) = 900\pi$

$A_1 + A_2 + A_3 = (100 + 500 + 900)\pi = 1500\pi$

Resposta: D

Para treinar, Rafael posicionou o seu arco a 5 metros do alvo e lançou uma flecha utilizando uma mira a laser, mostrando que sua flecha foi lançada numa direção perpendicular ao plano do alvo, na direção do centro dos círculos. Entretanto, o vento e o efeito da gravidade deslocaram sua flecha, que atingiu o alvo 12 cm para a esquerda e 9 cm para baixo em relação ao centro dos círculos. Rafael afastou o arco para 15 metros de distância do alvo, mantendo a mesma direção da mira e lançou mais uma flecha. Se o desvio provocado pelo vento e pelo efeito da gravidade nesse novo lançamento se manteve proporcional à distância de lançamento, a pontuação correspondente à faixa em que essa segunda flecha atingiu o alvo foi

a) 10 pontos.

b) 20 pontos.

c) 40 pontos.

d) 80 pontos.

e) 160 pontos.

Resolução

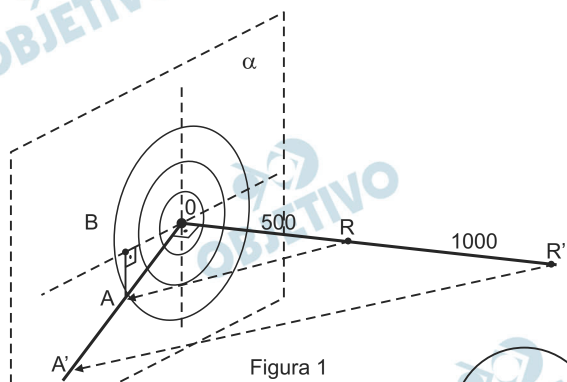


Figura 1

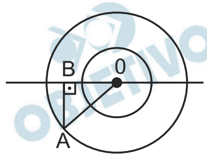


Figura 2

I) No triângulo OAB da figura 2, temos, em cm;
$OA^2 = OB^2 + BA^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow OA = 15$

II) Da semelhança dos triângulos ROA e R'OA' da figura 1 temos, em cm;

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OR}{OR'} \Rightarrow \frac{15}{OA'} = \frac{500}{1500} \Leftrightarrow OA' = 45$$

A 45 cm do centro, a flecha atinge a terceira faixa cinza do centro para fora, lugar cuja pontuação é 20.

Resposta: B

O treinador de Rafael propôs a ele o cálculo de um índice de precisão que avalie a sua habilidade como atirador. Para calculá-lo, Rafael precisa:

- multiplicar cada pontuação possível do alvo pela probabilidade de ele acertar uma flecha na faixa correspondente;
- somar os resultados das multiplicações feitas para as 6 faixas.

Rafael registrou na tabela a seguir as pontuações que ele obteve durante um treino no qual ele lançou 200 flechas.

Pontuação	10	20	40	80	160	320
Acertos	20	30	40	50	40	20

Usando os dados da tabela para estimar as probabilidades, o índice de precisão de Rafael é

a) 96. b) 97. c) 98. d) 99. e) 100.

Resolução

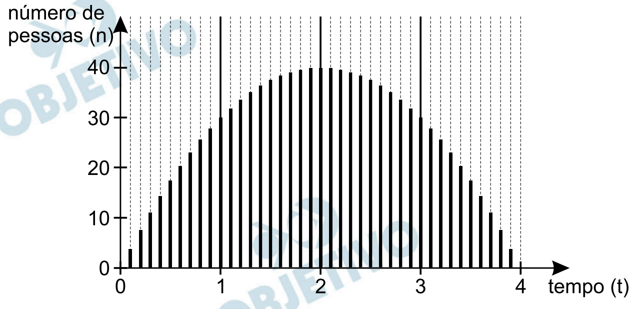
A tabela mostra a pontuação, o número de acentos, a probabilidade de Rafael acertar na região do alvo que permite essa pontuação e o índice de precisão para cada região do alvo.

Pontuação	Acertos	Probabilidade de acertos	Produto da pontuação pela probabilidade
10	20	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$10 \cdot \frac{1}{10} = 1$
20	30	$\frac{30}{200} = \frac{3}{20}$	$20 \cdot \frac{3}{20} = 3$
40	40	$\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$	$40 \cdot \frac{1}{5} = 8$
80	50	$\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$	$80 \cdot \frac{1}{4} = 20$
160	40	$\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$	$160 \cdot \frac{1}{5} = 32$
320	20	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$320 \cdot \frac{1}{10} = 32$

Assim, o índice de precisão de Rafael é
$1 + 3 + 8 + 20 + 32 + 32 = 96$

Resposta: A

O número n de pessoas presentes em uma festa varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.



Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função n(t) é

a) $n(t) = -10t^2 + 4t + 50$.

b) $n(t) = -10t^2 + 40t + 50$.

c) $n(t) = -10t^2 + 4t$.

d) $n(t) = -t^2 + 40t$.

e) $n(t) = -10t^2 + 40t$.

Resolução

O gráfico sugere uma parábola de raízes 0 e 4 e vértice no ponto (2; 40). Assim, pela forma fatorada, temos:
$n(t) = a(t-0)(t-4) = at(t-4)$ para $t = 2$, temos
$n(2) = a \cdot 2(2-4) = 40 \Leftrightarrow a = -10$
Desta forma, $n(t) = -10 \cdot t \cdot (t-4) = -10t^2 + 40t$

Resposta: $\boxed{E}$

Uma operadora de telefonia celular oferece a seus clientes dois planos:

Superminutos: o cliente paga uma tarifa fixa de R$ 100,00 por mês para os primeiros 200 minutos que utilizar. Caso tenha consumido mais minutos, irá pagar R$ 0,60 para cada minuto que usou a mais do que 200.

Supertarifa: o cliente paga R$ 60,00 de assinatura mensal mais R$ 0,40 por minuto utilizado.

Todos os meses, o sistema da operadora ajusta a conta de cada um de seus clientes para o plano mais barato, de acordo com as quantidades de minutos utilizadas. Nesse modelo, o plano **Superminutos** certamente será selecionado para consumidores que usarem

a) menos do que 60 minutos no mês.

b) entre 40 e 220 minutos no mês.

c) entre 60 e 300 minutos no mês

d) entre 100 e 400 minutos no mês.

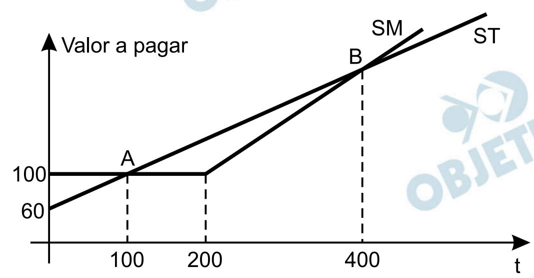
e) mais do que 400 minutos no mês.

Resolução

Sendo *x* a quantidade de minutos utilizado, pelos clientes SM(x) e ST(x), respectivamente, as quantias pagas pelo cliente nos planos Superminutos e Supertarifa, temos, em reais:

$$SM(x) = \begin{cases} 100, \text{ se } 0 \le x \le 200 \\ 100 + 0{,}60(x - 200); \text{ se } x > 200 \end{cases} \text{ e}$$

$$ST(x) = 60 + 0{,}40x$$



No ponto A, temos:

$$ST(x) = 60 + 0{,}40x = 100 \Rightarrow x = 100$$

No ponto B, temos:

$$ST(x) = 60 + 0{,}40x = 100 + 0{,}60(x - 200) \Leftrightarrow$$

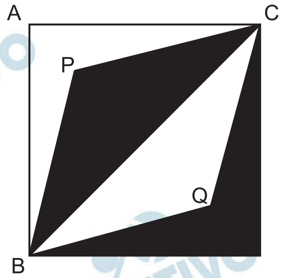
$$\Leftrightarrow 60 + 0{,}40x = 0{,}60x - 20 \Leftrightarrow x = 400$$

Assim, o plano Superminutos é mais vantajoso entre 100 e 400 minutos.

Resposta: D

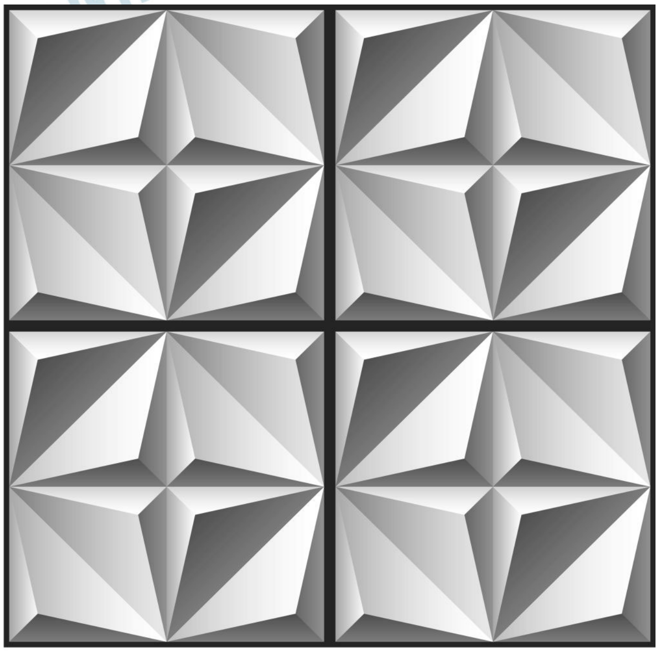
Utilize as informações a seguir para as questões 8 e 9.

Uma artista plástica está criando uma nova obra, que será um quadro com alto relevo de formas geométricas. Para iniciar o projeto, ela desenhou o quadrado base da obra, mostrada abaixo.



Esse quadrado tem 40 cm de lado e o ponto P foi posicionado 8 cm para a direita e 8 cm para baixo do ponto A. Traçando a diagonal do quadrado e tomando o ponto P como vértice, ela construiu o triângulo em preto e, usando a simetria em relação à diagonal, ela construiu o triângulo em branco, com vértice no ponto Q.

Em seguida, reproduzindo esse quadrado base 16 vezes, ela construiu o quadro em relevo mostrado abaixo, elevando 2 tetraedros sobre cada quadrado base, cada um com altura de 6 cm em relação ao plano do quadrado base, conforme ilustra a figura a seguir.

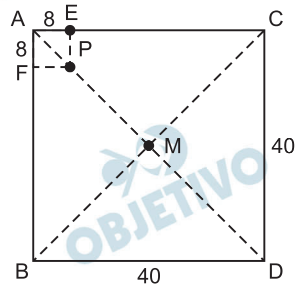


A área do triângulo PBC do quadrado base é igual a

a) 320 cm^2. b) 480 cm^2. c) 640 cm^2.

d) 800 cm^2. e) 960 cm^2.

Resolução



I) **$BC = AD = 40\sqrt{2}$, pois são diagonais do quadrado.**

$AP = 8\sqrt{2}$, pois é diagonal do quadrado AEPF de lado 8.

Assim, $PM = AM - AP = \dfrac{AD}{2} - AP =$

$= \dfrac{40\sqrt{2}}{2} - 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

II) **A área do triângulo PBC, em cm^2, é de:**

$$S = \frac{BC \cdot PM}{2} = \frac{40\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2}}{2} = 480$$

Resposta: B

Para garantir o efeito visual que desejava, a artista plástica fez as faces dos tetraedros de material transparente e encheu com um líquido contendo material reflexivo. O volume de líquido necessário para encher todo o quadro é de, aproximadamente,

a) 45 litros. b) 47 litros. c) 49 litros.
d) 51 litros. e) 53 litros.

Resolução

I) As bases de cada tetraedro são triângulos congruentes ao triângulo ABC de área, em cm^2,

$$\frac{AB \,.\, AC}{2} = \frac{40 \,.\, 40}{2} = 800$$

II) A altura de cada tetraedro é de 6 cm e o volume, em cm^3, é

$$V = \frac{1}{3} \,.\, S_{ABC} \,.\, 6 = \frac{1}{3} \,.\, 800 \,.\, 6 = 1\,600$$

III) O volume dos 32 tetraedros é
$32V = 32 \,.\, 1\,600 \text{ cm}^3 = 51\,200 \text{ cm}^3 =$
$= 51{,}2 \text{ dm}^3 = 51{,}2$ litros.

Resposta: D

Considere dois números positivos x e y, com x > y, tais que

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 15 \end{cases}.$$

Nessas condições, 2x é igual a

a) 31. b) 32. c) 33. d) 34. e) 35.

Resolução

I) Se x e y são positivos e x > y, então x + y > 0 e x – y > 0. Além disso, $\sqrt{x+y} > \sqrt{x-y}$

II) $$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 \\ \sqrt{x+y} \,.\, \sqrt{x-y} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

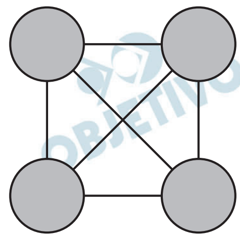
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 5 \\ \sqrt{x-y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$$

III) Desta forma, 2x = 2 . 17 = 34

Resposta: D

11

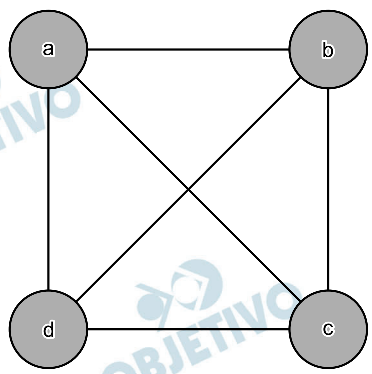
No *jogo da multiplicação unitária* deve-se preencher cada um dos círculos sombreados na figura com um dos números 1 ou −1. Em seguida, deve-se multiplicar os números dois a dois, obtendo um resultado para cada linha que liga dois círculos. Por último, deve-se somar os resultados de todas essas multiplicações, obtendo o resultado do jogo.



O menor resultado que esse jogo pode ter é

a) 0. b) – 1. c) – 2. d) – 4. e) – 6.

Resolução

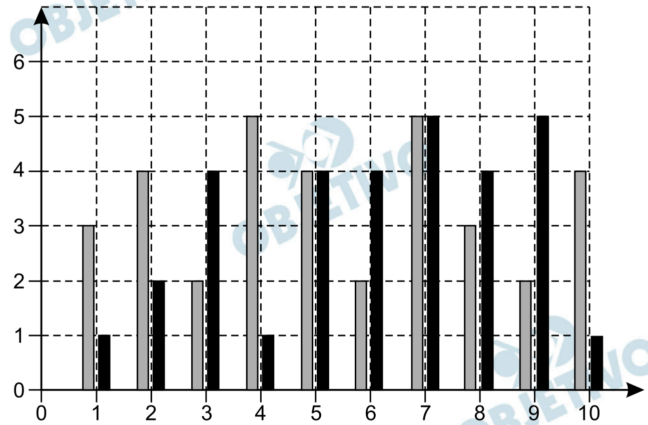


Chamemos de a, b, c e d os valores *um* ou *menos um* colocados nos vértices do quadrado.
Existem $2^4 = 16$ formas de preencher estes vértices com 1 e – 1, porém, como todos multiplicam todos, basta analisar cinco casos.

	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	soma
Todos positivos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
3 positivos e 1 negativo	1	1	1	– 1	1	1	– 1	1	– 1	– 1	0
2 positivos e 2 negativo	1	1	– 1	– 1	1	– 1	– 1	– 1	– 1	1	– 2
1 positivo e 4 negativo	1	– 1	– 1	– 1	– 1	– 1	– 1	1	1	1	0
ambos negativos	– 1	– 1	– 1	– 1	1	1	1	1	1	1	6

Resposta: C

O gráfico abaixo representa o número de gols marcados (barras em cinza) e o número de gols sofridos (barras em preto) por uma equipe de futebol de salão nos 10 jogos de um campeonato.



Em cada partida, o saldo de gols da equipe é dado pela diferença entre os gols marcados e os gols sofridos. A média dos saldos de gols da equipe nesses dez jogos é igual a

a) – 0,3. b) – 0,1. c) 0. d) 0,1. e) 0,3.

Resolução

O total de gols marcados é

3 + 4 + 2 + 5 + 4 + 2 + 5 + 3 + 2 + 4 = 34

O total de gols sofridos é

1 + 2 + 4 + 1 + 4 + 4 + 5 + 4 + 5 + 1 = 31

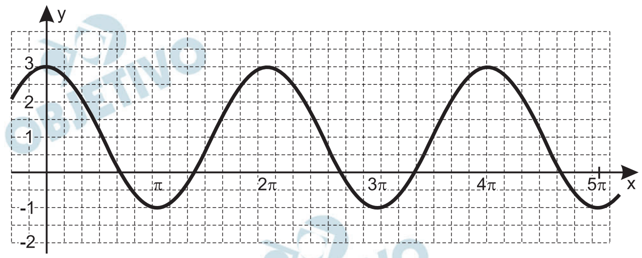
A média dos saldos de gols dessa equipe nos dez jogos que participou foi:

$$M = \frac{34 - 31}{10} = 0,3$$

Resposta: $\boxed{E}$

13

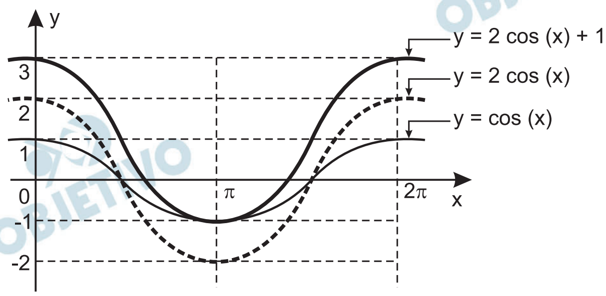
A figura abaixo representa o gráfico da função
$f(x) = a \cos(x) + b$.



O soma a + b e a diferença b – a são, respectivamente, iguais a

a) 3 e 1.
b) 1 e – 3.
c) π e 1.
d) – 1 e π.
e) 3 e – 1.

Resolução



Assim, o gráfico apresentado é da função
$f(x) = 2\cos(x) + 1$ e, portanto, a = 2 e b = 1
Desta forma, $a + b = 2 + 1 = 3$ e $b - a = 1 - 2 = -1$

Resposta: $\boxed{E}$

14

A fila para entrar em uma balada é encerrada às 21h e, quem chega exatamente nesse horário, somente consegue entrar às 22h, tendo que esperar uma hora na fila. No entanto, quem chega mais cedo espera menos tempo: a cada dois minutos de antecipação em relação às 21h que uma pessoa consegue chegar, ela aguarda um minuto a menos para conseguir entrar. Se uma pessoa não quiser esperar nem um segundo na fila, o horário máximo que ela deve chegar é

a) 19h.
b) 19h15min.
c) 19h30min.
d) 19h45min.
e) 20h.

Resolução

Se a pessoa chega às 21h à fila, espera uma hora para entrar na balada. Quem antecipa (2x) minutos sua chegada à fila, aguarda x minutos a menos para entrar na balada. Assim, quem chega à fila às $(21 \cdot 60 - 2x)$ minuto, espera $(60 - x)$ minutos para entrar.

Se a pessoa não quer esperar nem um segundo, então $60 - x = 0 \Leftrightarrow x = 60$.

Assim, a pessoa deverá chegar à "fila" às $(21 \cdot 60 - 2 \cdot 60)$min = 19h.

Resposta: A

15

Uma rede de cafeterias vende copos térmicos para que o cliente possa comprar seu café e levá-lo em seu próprio recipiente. Como, nesse caso, a empresa economiza com os copos descartáveis, quando o cliente usa o copo térmico da rede, recebe um desconto de R$ 0,25 no café. Para decidir se compraria um copo térmico, um cliente calculou que seria necessário receber este desconto 397 vezes para que ele recuperasse o valor a ser pago no copo. O preço do copo térmico é um valor entre

a) R$ 85,00 e R$ 90,00.

b) R$ 90,00 e R$ 95,00.

c) R$ 95,00 e R$ 100,00.

d) R$ 105,00 e R$ 110,00.

e) R$ 110,00 e R$ 115,00.

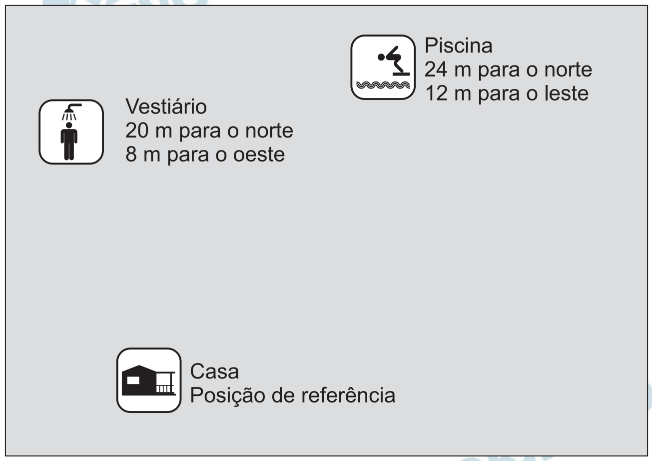
Resolução

Se a cada café adquirido com o copo térmico o cliente economiza R$ 0,25, em 397 cafés, o cliente economizará 397 . R$ 0,25 = R$ 99,25, valor de aquisição do copo.

Resposta: C

Utilize as informações a seguir para as questões 16 e 17.

O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema abaixo, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.



16

O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço numa localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

a) $4,2$ m para o leste e $13,8$ m para o norte.

b) $3,8$ m para o oeste e $13,1$ m para o norte.

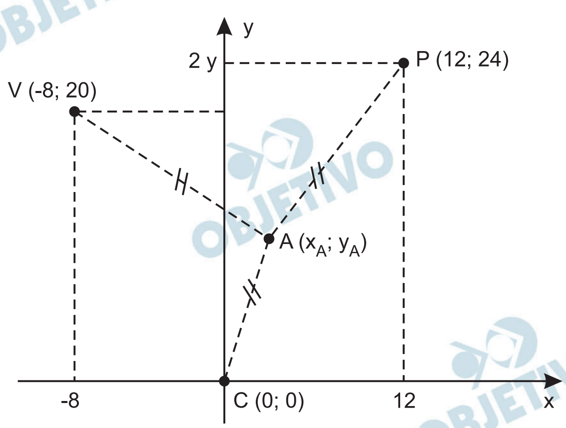
c) $3,8$ m para o leste e $13,1$ m para o norte.

d) $3,4$ m para o oeste e $12,5$ m para o norte.

e) $3,4$ m para o leste e $12,5$ m para o norte.

Resolução

Adotando-se um sistema cartesiano ortogonal, com origem no centro da casa, eixo das abscissas orientadas de oeste para leste, e eixo das ordenadas orientadas de sul para norte, temos a casa na posição C(0; 0), a piscina na posição P(12; 24) e o vestiário no ponto V(– 8; 20) desse sistema cartesiano.



A posição $A(x_A; y_A)$ onde o poço deverá ser construído é tal que AC = AP = AV. Assim,

$$\begin{cases} \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{(x_A - 12)^2 + (y_A - 24)^2} \\ \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{(x_A + 8)^2 + (y_A - 20)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = x_A^2 - 24x_A + 144 + y_A^2 - 48y_A + 576 \\ x_A^2 + y_A^2 = x_A^2 + 16x_A + 64 + y_A^2 - 40y_A + 400 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x_A + 48y_A = 720 \\ 16x_A - 40y_A = -464 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 2y_A = 30 \\ 2x_A - 5y_A = -58 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{34}{9} \text{ e } y_A = \frac{118}{9}$$

Assim, o poço deverá ser construído a $\frac{34}{9} \simeq 3,8$ metros a leste da casa e $\frac{118}{9} \simeq 13,1$ metros ao norte da casa.

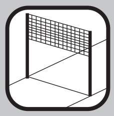
Resposta: C

Aproveitando que iria iniciar uma obra, o Sr. Antônio decidiu construir uma quadra. Sua esposa, no entanto, exigiu as seguintes condições para que se definisse a localização da quadra, para que ninguém viesse suado para a casa:

- as localizações da quadra, do vestiário e da casa devem estar sobre uma mesma linha reta;
- o vestiário deve ser um ponto do segmento de reta que liga a casa à quadra.

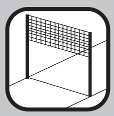
O Sr. Antônio fez uma anotação adicional em seu esquema para o arquiteto. Das opções a seguir, a única que atende às exigências impostas pela esposa do Sr. Antônio é:

a)



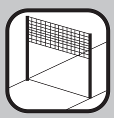
Quadra
50 m para o norte
20 m para o oeste

b)



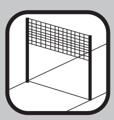
Quadra
50 m para o norte
20 m para o leste

c)



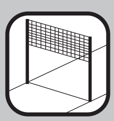
Quadra
10 m para o norte
4 m para o oeste

d)



Quadra
20 m para o sul
8 m para o leste

e)



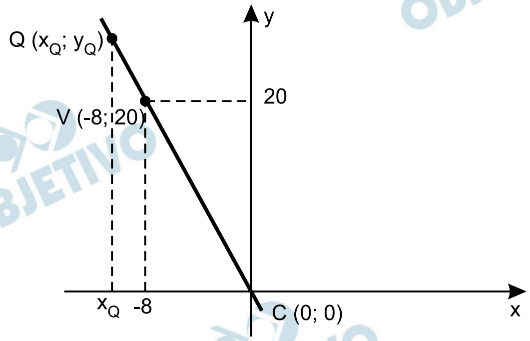
Quadra
20 m para o sul
8 m para o oeste

Resolução

Estando a casa na origem do sistema de eixo e o vestiário na posição V(– 8; 20), a equação da reta que contém o vestiário e a casa é

$$y - 0 = \frac{20 - 0}{-8 - 0}(x - 0) \Leftrightarrow -8y = 20x \Leftrightarrow 5x + 2y = 0$$

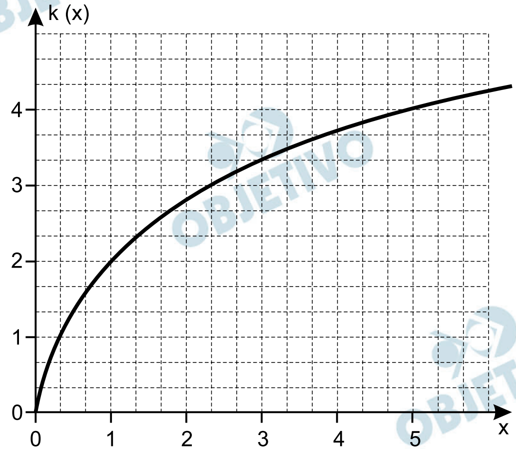
As coordenadas $Q(x_Q; y_Q)$ da quadra deverão satisfazer esta equação e ser tal que $x_Q < -8$, pois o vestiário deverá estar entre a quadra e a casa.



O ponto (– 20; 50) satisfaz a equação 5x + 2y = 0 e está 20 m a oeste e 50 m a norte da casa.

Resposta: A

A relação entre o investimento x (em milhões de reais) na propaganda para a divulgação de um produto e o número k de potenciais consumidores (em milhões) atingidos por essa campanha é dada por uma função k(x), cujo gráfico está representado a seguir.



Para avaliar o retorno dessa campanha, calculam-se dois índices, como se segue:

- identificam-se os valores x_1, x_2 e x_3 para os quais 1, 2 e 4 milhões de potenciais consumidores são atingidos, respectivamente;

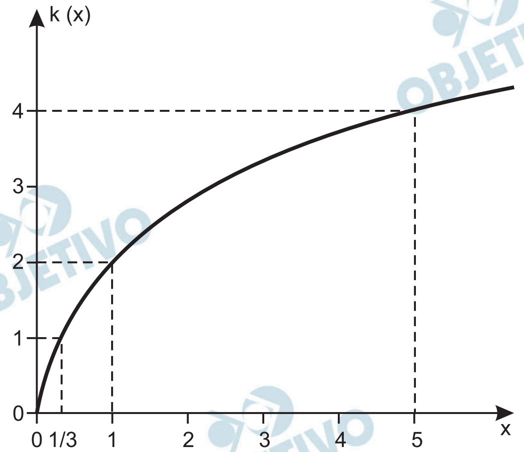
- a razão $\dfrac{x_2}{x_1}$ resulta no índice I_a;

- a razão $\dfrac{x_3}{x_2}$ resulta no índice I_b.

Para a função k(x) acima, o valor de $\dfrac{I_b + I_a}{I_b - I_a}$ é

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

Resolução



Conforme o gráfico

$k(x_1) = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}$

$k(x_2) = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

$k(x_3) = 4 \Rightarrow x_3 = 5$

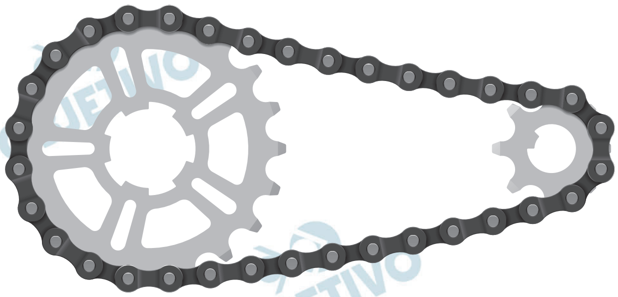
Assim, $I_a = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3,$

$I_b = \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{5}{1} = 5$

Desta forma, $\dfrac{I_b + I_a}{I_b - I_a} = \dfrac{5 + 3}{5 - 3} = 4$

Resposta: C

O esquema abaixo mostra as duas rodas dentadas e a correia do sistema de transmissão de uma bicicleta.



Considere que a correia se ajuste sem folga aos dentes de ambas as rodas. Se R é a medida do raio da circunferência que dá forma à roda maior e r é a medida do raio da circunferência que dá forma à roda menor, então a razão $\frac{R}{r}$ é igual a

a) 2,0. b) 2,5. c) 3,0. d) 3,5. e) 4,0.

Resolução

Contados na figura, a roda maior tem 20 dentes e a roda menor tem 8 dentes. Admitindo-se que os raios sejam proporcionais ao número de dentes, temos:

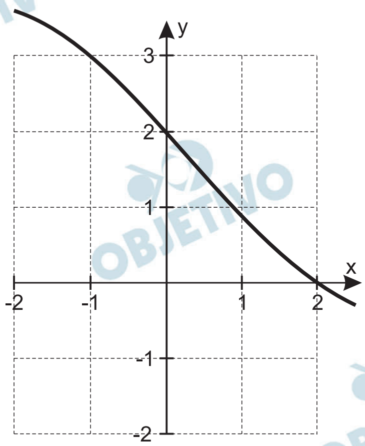
$$\frac{R}{r} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Resposta: B

Utilize as informações a seguir para as questões 20 e 21.

Considere o polinômio dado por
$p(x) = x^3 - x^2 - 22x + 40$.

A figura a seguir mostra parte do gráfico da função f, dada por $f(x) = \alpha \cdot p(x)$, em que α é um número real.



20

O valor de α é

a) 0,05. b) 0,5. c) 2. d) 5. e) 20.

Resolução

Pelo gráfico, temos f(0) = 2. Assim,
$f(0) = \alpha \,.\, p(0) = \alpha \,.\, (0^3 - 0^2 - 22 \,.\, 0 + 40) = 40\alpha = 2$

Desta forma, $\alpha = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Resposta: A

21

A diferença entre a maior e a menor raiz de p(x) é igual a

a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 9.

Resolução

Pelo gráfico, 2 é uma das raízes do polinômio p(x). Pelo Dispositivo Prático de Briott-Rufini, temos

1	– 1	– 22	40	2
1	1	– 20	0	

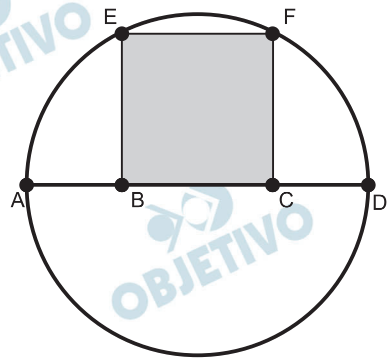
resulta que

$p(x) = (x - 2)(x^2 + x - 20) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ **ou**
$x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -5$ **ou** $x = 4$

As raízes de p(x) = 0 são 2, 4 e – 5 e a diferença entre a maior e a menor raiz é 4 – (– 5) = 9

Resposta: E

Na figura, $\overline{AD}$ é um diâmetro da circunferência que contém o lado $\overline{BC}$ do quadrado sombreado, cujos vértices E e F pertencem à circunferência.



Se **a** é a medida do segmento $\overline{AB}$ e ℓ é a medida do lado do quadrado, então $\dfrac{\ell}{a}$ é igual a

a) $\sqrt{5} - 2$.

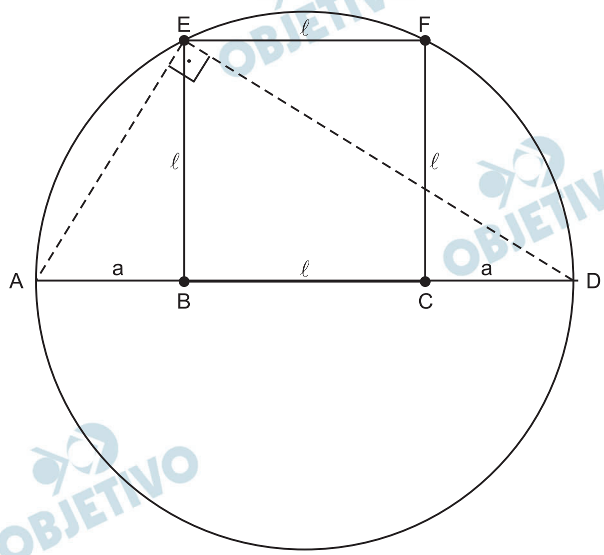
b) $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

c) $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

e) $\sqrt{5} + 2$.

Resolução



Sendo CD = AB = a e BC = EF = ℓ, temos:
BD = BC + CD = ℓ + a
No triângulo ADE, retângulo em E, vale a relação $BE^2 = AB \cdot BD$. Desta forma, $\ell^2 = a(a + \ell) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - a\ell - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$, **pois a e ℓ são positivos.**

Assim, $$\frac{\ell}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Resposta: C

23

Em uma noite, a razão entre o número de pessoas que estavam jantando em um restaurante e o número de garçons que as atendiam era de 30 para 1. Em seguida, chegaram mais 50 clientes, mais 5 garçons iniciaram o atendimento e a razão entre o número de clientes e o número de garçons ficou em 25 para 1. O número inicial de clientes no restaurante era

a) 250. b) 300. c) 350. d) 400. e) 450.

Resolução

Sendo *p* o número inicial de clientes e *g* o número inicial de garçons, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{g} = \dfrac{30}{1} \\ \dfrac{p+50}{g+5} = \dfrac{25}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 30g \\ p + 50 = 25g + 125 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 30g \\ 30g + 50 = 25g + 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 15 \\ p = 450 \end{cases}$$

Resposta: E

Uma empresa tem 15 funcionários e a média dos salários deles é igual a R$ 4.000,00. A empresa é dividida em três departamentos, sendo que:

- A média dos salários dos 6 funcionários administrativos é igual a R$ 3.750,00.
- A média dos salários dos 4 funcionários de desenvolvimento de produto é igual a R$ 4.125,00.

A média dos salários dos outros funcionários, do departamento comercial, é igual a

a) R$ 3.800,00.
b) R$ 3.900,00.
c) R$ 4.000,00.
d) R$ 4.100,00.
e) R$ 4.200,00.

Resolução

Seja S_a, S_d e S_c as somas dos salários dos funcionários administrativos, de desenvolvimento e comercial, respectivamente, em reais.
Seja também M_a, M_d e M_c as respectivas médias desses salários, em reais. Assim;

$$M_a = \frac{S_a}{6} = 3\,750 \Leftrightarrow S_a = 22\,500$$

$$M_d = \frac{S_d}{4} = 4\,125 \Leftrightarrow S_d = 16\,500$$

A média dos salários dos 15 funcionários da empresa

é $M = \dfrac{S_a + S_d + S_c}{15} = 4\,000 \Leftrightarrow S_a + S_d + S_c = 60\,000$

Desta forma, $22\,500 + 16\,500 + S_c = 60\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_c = 21\,000$ **e, portanto,**

$$M_c = \frac{S_c}{5} = \frac{21\,000}{5} = 4\,200$$

Resposta: $\boxed{E}$

25

Um bazar beneficente arrecadou R$ 633,00. Nenhum dos presentes contribuiu com menos de R$ 17,00, mas também ninguém contribuiu com mais de R$ 33,00. O número mínimo e o número máximo de pessoas presentes são, respectivamente, iguais a

a) 19 e 37. b) 20 e 37. c) 20 e 38.

d) 19 e 38. e) 20 e 39.

Resolução

O número *n* de presentes é tal que, em reais,

$$\frac{633}{n} > 17 \Leftrightarrow n < \frac{633}{17} \simeq 37{,}23$$

$$\frac{633}{n} < 33 \Rightarrow n > \frac{633}{33} \simeq 19{,}18$$

Assim, o número mínimo de pessoas presentes no bazar é 20 e o número máximo é 37.

Resposta: B

Para percorrer 1 km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada etapa, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele em cada etapa.

Etapa	Distância percorrida (km)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$

Ao final da etapa n, a distância total percorrida por Zeno será igual a

a) $\dfrac{2^n - 1}{2^n}$.   b) $\dfrac{2^n + 1}{2^n}$.   c) $\dfrac{n}{2^n}$.

d) $\dfrac{2n - 1}{2^n}$.   e) $\dfrac{2n + 1}{2^n}$.

Resolução

Ao final da etapa n, o total (S_n), em km, percorrido por Zeno é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica.

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}\right)$$

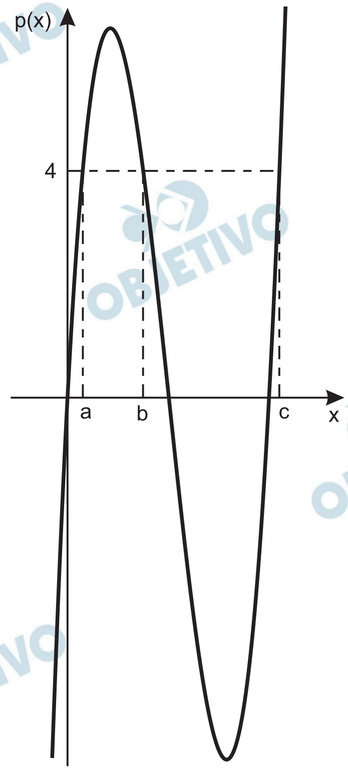
Assim,

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)\right]}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Resposta: A

Na figura, que mostra o gráfico da função polinomial $p(x) = 3x^3 - 16x^2 + 19x$, os valores a e c são tais que $a + c = 4$.



Dessa forma, o valor de c é igual a

a) $1 + \sqrt{7}$.
b) $2 + \sqrt{3}$.
c) $2 + \sqrt{6}$.
d) $3 + \sqrt{2}$.
e) $3 + \sqrt{5}$.

Resolução

Dado do gráfico de $p(x) = 3x^3 - 16x^2 + 9x$ que as raízes da equação $p(x) = 4$ são a, b e c, com $a < b < c$ e $a + c = 4$.

Assim,

$$3x^3 - 16x^2 + 19x = 4 \Leftrightarrow 3x^3 - 16x^2 + 19x - 4 = 0$$

Pela 1ª relação de Girard, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-16}{3} \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 + b = \frac{16}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

Pelo dispositivo prático de Briott-Rufini, temos:

3	– 16	19	– 4	$\frac{4}{3}$
3	– 12	3	0	

Assim, $3x^3 - 16x^2 + 19x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)(3x^2 - 12x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ ou $3x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ ou $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}, x = 2 - \sqrt{3}$ ou $x = 2 + \sqrt{3}$. **Desta forma,**

$a = 2 - \sqrt{3}, b = \dfrac{4}{3}$ e $c = 2 + \sqrt{3}$

Resposta: B

28

Certa comunidade mística considera 2015 um *ano de sorte*. Para tal comunidade, um ano é considerado de sorte se, e somente se, é formado por 4 algarismos distintos, sendo 2 pares e 2 ímpares. No período que vai do ano 1000 até o ano 9999, o número total de anos de sorte é igual a

a) 1680. b) 1840. c) 1920.
d) 2160. e) 2400.

Resolução

I) Se o algarismo dos milhares for ímpar podemos ter iipp, ipip ou ippi, onde i representa um algarismo ímpar e p representa um algarismo par. Nestas condições, o número de anos de sorte é $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1\,200$.

II) Se o algarismo dos milhares for par podemos ter p*iip, p*ipi ou p*pii, onde p* é um algarismo par não nulo. Nestas condições, o número de anos da sorte é $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 960$

III) Ao todo são 1200 + 960 = 2160 anos de sorte, no intervalo considerado.

Resposta: D

A proposição “se você trabalhar muito, então você enriquecerá” é equivalente à proposição

a) “se você não trabalhar muito, então não enriquecerá”.

b) “se você enriquecer, então você trabalhará muito”.

c) “não trabalhe muito, ou você enriquecerá”.

d) “se você enriquecer, então você não trabalhará muito”.

e) “se você trabalhar muito, então não enriquecerá”.

Resolução

A frase “se você trabalha muito, então você enriquecerá” é do tipo “se p, então q”. Frases desse tipo são equivalentes à “se não q, então não p.”

Assim, a frase inicial é equivalente a “se você não enriquece, então você não trabalha muito.”

A frase “não trabalhe muito, ou você enriquecerá” na forma de sugestão equivale a dizer “se você não enriquecer, então você não trabalhou muito” e, portanto, é equivalente à primeira fase.

Resposta: C

O rótulo de uma embalagem de suco concentrado sugere que o mesmo seja preparado na proporção de sete partes de água para uma parte de suco, em volume. Carlos decidiu preparar um copo desse suco, mas dispõe apenas de copos cônicos, mais precisamente na forma de cones circulares retos.

Para seguir exatamente as instruções do rótulo, ele deve acrescentar no copo, inicialmente vazio, uma quantidade de suco até

a) metade da altura.

b) um sétimo de altura.

c) um oitavo da altura.

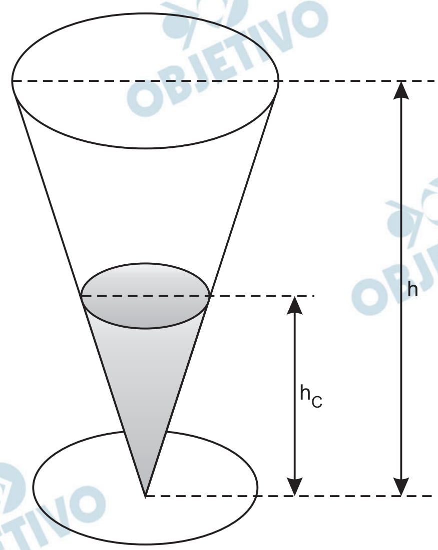
d) seis sétimos da altura.

e) sete oitavos da altura.

Resolução

Se cada copo do suco preparado contém uma parte de suco concentrado e sete partes de água, o volume V_c do suco concentrado deverá ser $\frac{1}{8}$ do volume V do copo.

Assim, sendo h_c e h, respectivamente, as alturas do suco concentrado dentro do copo e a altura do próprio copo, temos:



$$\frac{V_c}{V} = \left(\frac{h_c}{h}\right)^3 = \frac{\frac{1}{8}V}{V} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{h_c}{h}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow h_c = \frac{1}{2}\,h$$

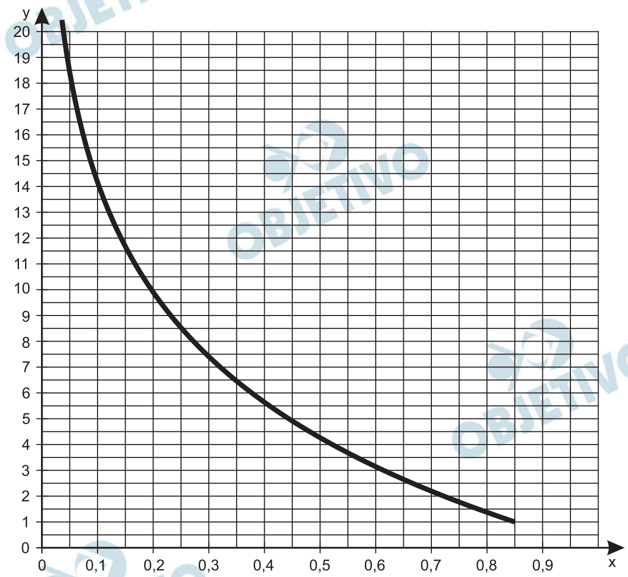
A quantidade de suco concentrado a ser colocado no copo deverá atingir a metade da altura do copo.

Resposta: A

Utilize as informações a seguir para as questões 31 e 32.

Informação I

A figura a seguir exibe parte do gráfico da função $f(x) = \log_{0,85} x$, cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 0{,}85\}$.



Observação: foram utilizadas escalas diferentes nos dois eixos para facilitar a visualização do gráfico.

Informação II

Um carro, que no ato da compra vale R$ 40.000,00, tem uma desvalorização de 15% ao ano. Ou seja, após um ano, o carro tem, a cada instante, um valor 15% menor do que o valor que tinha exatamente um ano antes.

31

Para que o carro perca 80% do seu valor, é necessário que se passem

a) entre 5 e 6 anos.
b) entre 6 e 7 anos.
c) entre 7 e 8 anos.
d) entre 8 e 9 anos.
e) entre 9 e 10 anos.

Resolução

Sendo V_i o valor inicial do carro, com uma desvalorização de 15% ao ano, após n anos, seu valor será de $V_n = V_i \,.\, (0{,}85)^n$.

Terá perdido 80% de seu valor inicial quando

$V_i \,.\, (0{,}85)^n = 0{,}20V_i \Leftrightarrow (0{,}85)^n = 0{,}20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{0,85}(0{,}85)^n = \log_{0,85}(0{,}20) \Leftrightarrow n = \log_{0,85}(0{,}20)$

Pelo gráfico apresentado $\log_{0,85}(0{,}20) \simeq 10$.

Desta forma, serão necessários entre 9 e 10 anos.

Resposta: E

Passados 20 anos, o carro valerá cerca de

a) R$ 600,00.
b) R$ 1.600,00.
c) R$ 6.000,00.
d) R$ 16.000,00.
e) R$ 25.000,00.

Resolução

1) Após 20 anos, o valor do carro será
$V_{20} = V_i \cdot (0{,}85)^{20}$ **(I)**

2) Fazendo $(0{,}85)^{20} = x$, temos:
$\log_{0,85}(0{,}85)^{20} = \log_{0,85}x \Leftrightarrow \log_{0,85}x = 20$
Pelo gráfico $\log_{0,85}x = 20$ para $0 < x < 0{,}05$ (aproximadamente 0,04).

3) Para V_i = R$ 40 000,00, temos em I,
V_{20} **= R$ 40 000,00 . $(0{,}85)^{20} \simeq$**
$\simeq$ R$ 40 000,00 . 0,04 = R$ 1 600,00

Resposta: B

33

Considere que a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma pessoa é inteligente, então ela tem opiniões bem embasadas ou está disposta a ouvir os argumentos dos outros."

Uma pessoa está disposta a ouvir os argumentos dos outros. Então,

a) ela é inteligente.
b) ela tem opiniões bem embasadas.
c) se ela tiver opiniões bem embasadas, ela é inteligente.
d) mesmo que tenha opiniões bem embasadas, pode não ser inteligente.
e) se ela não tiver opiniões bem embasadas, não é inteligente.

Resolução

As frases do tipo "se p, então q" não garantem a reciprocidade. O fato de q ocorrer não garante que p deva acontecer.
Assim, a frase "se uma pessoa é inteligente, então ela tem opiniões bem embasadas ou está disposta a ouvir os argumentos dos outros" não permite concluir que uma pessoa "disposta a ouvir os argumentos dos outros ou bem embasada" seja inteligente.

Resposta: D

Um determinado micro-organismo tem o seguinte ciclo de vida:

- 1 dia após ser gerado, produz 2 cópias de si mesmo;
- 2 dias após ser gerado, produz outras 2 cópias de si mesmo e, imediatamente, morre.

Considere uma cultura que, no início do dia 1, possuía apenas 1 micro-organismo, imediatamente após ser gerado. A tabela a seguir mostra a evolução da população ao longo dos 3 primeiros dias.

Quantidade de micro-organismos...	no final do dia 1	no final do dia 2	no final do dia 3
com 1 dia de vida	1	2	6
recém gerados	2	6	16
que acabaram de morrer	0	1	2
vivos, no total	3	8	22

Passados 6 dias, logo após as gerações e as mortes, a cultura terá

a) 46 indivíduos.
b) 448 indivíduos.
c) 564 indivíduos.
d) 1073 indivíduos.
e) 2048 indivíduos.

Resolução

Quantidade de micro-organismos	Ao final do					
	1º dia	**2º dia**	**3º dia**	**4º dia**	**5º dia**	**6º dia**
com 1 dia de vida	**1**	**2**	**6**	**16**	**44**	**120**
recém-gerados	**2**	**6**	**16**	**44**	**120**	**328**
que acabaram de morrer	**0**	**1**	**2**	**6**	**16**	**44**
vivos no total	**3**	**8**	**22**	**60**	**164**	**448**

Resposta: B

Uma universidade decidiu fazer uma análise sobre a quantidade de alunos cursando dependências, ou seja, aqueles que foram reprovados em alguma matéria em determinado semestre e tiveram de cursá-la novamente no semestre seguinte. As conclusões, todas referentes a uma mesma turma de um curso, foram:

- Cerca de 30% dos alunos tiveram dependência em pelo menos uma matéria ao término do 1º semestre do curso;
- Ao término do 2º semestre, cerca de 80% dos que não cursavam dependências foram aprovados em todas as matérias, ao passo que apenas 30% dos que cursavam alguma dependência foram aprovados em todas as matérias;
- As mesmas porcentagens do 2º semestre se repetiram ao final do 3º semestre.

Assim, ao término do 3º semestre, os alunos livres de dependências para o semestre seguinte representavam

a) 35,0% da turma.
b) 37,5% da turma.
c) 50,0% da turma.
d) 62,5% da turma.
e) 65,0% da turma.

Resolução

Seja *n* o número de alunos da turma. Admitamos que os alunos que não ficaram em dependência foram aprovados (não houve reprovação).

1) ***Ao final do 1º semestre:***
30% . n ficaram em dependência
70% . n foram aprovados

2) ***Ao final do 2º semestre:***
Foram aprovados em todas as matérias 80% dos que não cursaram dependência e 30% dos que cursaram dependência. Desta forma, foram para o 3º semestre sem dependência 80% . 70%n + 30% . 30%n = 65% n alunos. Ficaram em dependência 35%n alunos.

3) ***Ao final do 3º semestre:***
Foram aprovados em todas as disciplinas 80% dos alunos que não cursaram dependência e 30% dos alunos que cursaram dependência. Assim, foram aprovados: 80% . 65%n + 30% . 35%n = 62,5%n alunos.

Resposta: D