MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
Re z: parte real de $z \in \mathbb{C}$
Im z: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$\binom{n}{p}$: número de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*.
mdc(j,k): máximo divisor comum dos números inteiros *j* e *k*.
n(X) : número de elementos de um conjunto finito X.
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Obs.: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

1 D

Se A, B, C forem conjuntos tais que

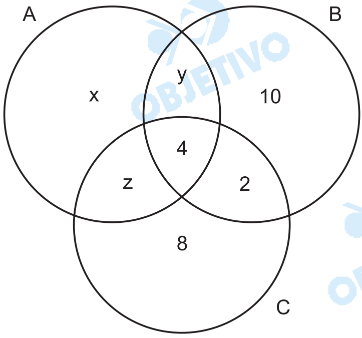
$n(A \cup B) = 23$, $n(B - A) = 12$, $n(C - A) = 10$,

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.
b) formam uma progressão aritmética de razão 2.
c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
e) não formam uma progressão aritmética.

Resolução

As informações apresentadas permitem construir o diagrama de Venn-Euler seguinte:



1) $n(A \cup B) = x + y + z + 4 + 10 + 2 = 23 \Leftrightarrow x + y + z = 7$
2) $n(A) = x + y + z + 4 = 7 + 4 = 11$
3) $n(A \cup C) = x + y + z + 4 + 2 + 8 = 7 + 14 = 21$
4) $n(A \cup B \cup C) = x + y + z + 4 + 10 + 2 + 8 = 7 + 24 = 31$
Assim: (11; 21; 31) é uma P.A. de razão 10 cujo último termo é 31.

2 A

Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

a) $2^8 - 9$. b) $2^8 - 1$. c) $2^8 - 2^6$.

d) $2^{14} - 2^8$. e) 2^8.

Resolução

Os subconjuntos de A que são disjuntos de B são subconjuntos de (A – B). Como $B \subset A$,

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - n(B) = 14 - 6 = 8.$

O conjunto A – B possui $2^8 - 9$ subconjuntos, pois

$$C_{8;0} + C_{8;1} + \ldots + C_{8;6} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{6} =$$

$$= 2^8 - \binom{8}{8} - \binom{8}{7} = 2^8 - 1 - 8 = 2^8 - 9$$

3 B

Considere a equação:

$$16\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

a) 3. b) 6. c) 9. d) 12. e) 15.

Resolução

$$16 \,.\, \left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4$$

1) $$\frac{1 - ix}{1 + ix} \,.\, \frac{1 - ix}{1 - ix} = \frac{1 - 2ix + i^2x^2}{1 - i^2x^2} =$$

$$= \frac{1 - x^2 - 2xi}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} \,.\, i$$

2) $$\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{1 + 2i + i^2 - (1 - 2i + i^2)}{1 - i^2} = 2i$$

3) *Se* $z = \dfrac{1 - i \,.\, x}{1 + i \,.\, x}$, *temos*

$$16z^3 = (2i)^4 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z = 1 \text{ ou } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ou } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

4) $$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2}i = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

A soma dos quadrados das soluções é

$0^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6.$

4 E

Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i \cot g\, x}, \; x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

a) $|\cos x|$ b) $(1 + \operatorname{sen} x)/2$ c) $\cos^2 x$

d) $|\operatorname{cossec} x|$ e) $|\operatorname{sen} x|$

Resolução

$$\left| \frac{1}{1 + i \cot g\, x} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot g^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cossec}^2 x}} = \frac{1}{|\operatorname{cossec} x|} = |\operatorname{sen} x|$$

5 **D**

Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B / H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$

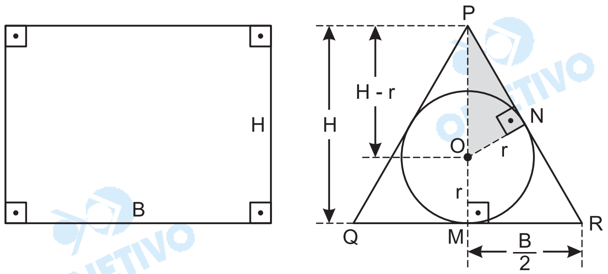
b) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$

c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$

d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Resolução



1) No triângulo PMR, retângulo, temos

$$PR = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2}$$

2) Da semelhança dos triângulos PMR e PNO, temos:

$$\frac{MR}{NO} = \frac{PR}{PO} \Rightarrow \frac{\frac{B}{2}}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2}}{H - r} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow B\,(H - r) = r\sqrt{B^2 + 4H^2}$ (I), em que r é o raio do círculo inscrito no triângulo PQR.

3) Se as áreas do retângulo, do triângulo isósceles e do círculo nele inscrito formam uma progressão geométrica, então $\left(BH; \dfrac{BH}{2}; \pi\, r^2\right)$ formam uma P.G. e, portanto, $\left(\dfrac{BH}{2}\right)^2 = BH\,.\,\pi\, r^2 \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{BH}{4\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{BH}{4\pi}}$, pois $r > 0$

4) Substituindo r na equação (I), resulta

$$B\left(H - \sqrt{\frac{BH}{4\pi}}\right) = \sqrt{\frac{BH}{4\pi}} \cdot \sqrt{B^2 + 4H^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\left(H - H\sqrt{\frac{B}{4\pi H}}\right) =$$

$$= H^2\sqrt{\frac{B}{4\pi H}} \cdot \sqrt{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + 4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{H} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{B}{H}\right)}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{B}{H}\right) \cdot \left[\left(\frac{B}{H}\right)^2 + 4\right]} \quad (II)$$

5) Fazendo $\frac{B}{H} = x$, e substituindo em (II), temos:

$$x \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot x}\right) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot x\,(x^2 + 4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x}{4\pi}}\right)^2 = \frac{x}{4\pi}\,(x^2 + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2x\sqrt{\frac{x}{4\pi}} + \cancel{\frac{x}{4\pi}} = \cancel{\frac{x}{4\pi}} + \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{\pi} = 2x\sqrt{\frac{x}{4\pi}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2x}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{x^3}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$$

6   **C**

Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo

a) $(0, (1 + \sqrt{2})/2)$.

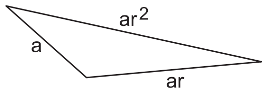
b) $\left((1 + \sqrt{2})/2, \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}\right)$.

c) $\left(\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}, (1 + \sqrt{5})/2\right)$.

d) $\left((1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{2 + \sqrt{2}/2}\right)$.

e) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}/2}, (2 + \sqrt{3})/2)\right)$.

Resolução



Seja um triângulo de lados a, ar e ar², com a > 0 e r > 1

1º) De acordo com a condição de existência desse triângulo, tem-se:

$ar^2 < a + ar \Leftrightarrow r^2 - r - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} < r < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

mas, como r > 1, então: $\boxed{1 < r < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ *(I)*

2º) Para que esse triângulo seja obtusângulo, deve-se ter ainda:

$(ar^2)^2 > a^2 + (ar)^2 \Leftrightarrow r^4 - r^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(r^2 - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(r^2 - \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(r^2 - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(r - \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}\right)\left(r + \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad r < -\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ *ou* $r > \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ *(II)*

3º) Das desigualdades (I) e (II), tem-se finalmente:

$\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}} < r < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \in \left(\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

7 A

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\log_k(xy) = 49,$$
$$\log_k(x/z) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

a) 52. b) 61. c) 67. d) 80. e) 97.

Resolução

Considerando que:

$$\log_k(xy) = 49 \Rightarrow \log_k x + \log_k y = 49 \qquad (1)$$

$$\log_k\left(\frac{x}{z}\right) = 44 \Rightarrow \log_k x - \log_k z = 44 \qquad (2)$$

Se $\log_k x$, $\log_k y$, $\log_k z$ são números primos positivos, então pode-se concluir que $\log_k x = 47$, $\log_k y = 2$ e $\log_k z = 3$, pois se a soma de dois primos é ímpar, então um deles é 2.

Portanto, $\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z =$

$= 47 + 2 + 3 = 52$.

8 E

Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma x + y é igual a

a) 0. b) 1. c) $2\log_5 3$. d) $\log_5 2$. e) $3\log_e 2$.

Resolução

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y.\sqrt{5}} = \frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y.\sqrt{5}} \cdot \frac{4 + e^y.\sqrt{5}}{4 + e^y.\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4 \cdot e^x + e^x \cdot e^y \cdot \sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 2e^y \cdot 5}{16 - 5 \cdot e^{2y}} \in \mathbb{Q}$$

Então $e^x \cdot e^y \cdot \sqrt{5} - 8\sqrt{5} = 0$, pois

e^x, e^y e $\dfrac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y.\sqrt{5}}$ são racionais

Assim:

$$e^{x+y}.\sqrt{5} - 8 \cdot \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot (e^{x+y} - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x+y} = 8 \Leftrightarrow x + y = \log_e 8 = 3 \cdot \log_e 2$$

9 B

Seja Q(z) um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de Q(z), Q(0) = 2 e Q(1) = 8, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de Q(z) é igual a

a) 9. b) 7. c) 5. d) 3. e) 1.

Resolução

Sendo $Q(z) = (z^2 + az + b)(z^3 + z^2 + z + 1)$, *temos:*

$$\begin{cases} Q(0) = 2 \\ Q(1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \cdot 1 = 2 \\ (1 + a + b)(1 + 1 + 1 + 1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Então, $Q(z) = (z^2 - z + 2)(z^3 + z^2 + z + 1)$ *e as raízes de Q(z) são tais que*

$z^2 - z + 2 = 0$ *ou* $z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2} \text{ ou } (z + 1)(z^2 + 1) = 0.$$

As raízes de Q(z) são, portanto, os números

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i;$$

$z_3 = -1$; $z_4 = i$ *ou* $z_5 = -i$.

Assim, $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 =$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) + 1 + 1 + 1 =$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

10 B

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $\left|a + |b| - c\right|$ é igual a

a) 104. b) 114. c) 124. d) 134. e) 144.

Resolução

Para que $9x^2 - 63x + c = (x + a)^3 - (x + b)^3$, *devemos ter:*

$$9x^2 - 63x + c = (3a - 3b)x^2 + (3a^2 - 3b^2)x + (a^3 - b^3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 9 \\ 3a^2 - 3b^2 = -63 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a^2 - b^2 = -21 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 117 \end{cases}$$

Logo, $\left|a + |b| - c\right| = \left|-2 + |-5| - 117\right| = |-114| = 114$

11 D

Sobre a equação na variável real x,

$$\Big|\,\big|\,|x-1|-3\,\big|-2\,\Big| = 0,$$

podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

Resolução

$\Big|\,\big|\,|x-1|-3\,\big|-2\,\Big| = 0 \Leftrightarrow \big|\,|x-1|-3\,\big|-2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big|\,|x-1|-3\,\big| = 2$

Para $x \le 1$, temos:

$|-x+1-3| = 2 \Leftrightarrow |-x-2| = 2 \Leftrightarrow x = -4$ *ou* $x = 0$

Para $x \ge 1$, temos:

$|x-1-3| = 2 \Leftrightarrow |x-4| = 2 \Leftrightarrow x = 6$ *ou* $x = 2$.

O conjunto-solução da equação é:

$S = \{-4; 0; 2; 6\}$ *e* $-4+0+2+6 = 4$

12 E

Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204 b) 206 c) 208 d) 210 e) 212

Resolução

Sendo 1 ou 2 o algarismo das centenas, temos $2 \cdot (6 \cdot 5 + 1) = 62$ números, pois apenas o 7 pode aparecer mais de uma vez.

Para 3, 4, 5, 6 ou 7 como algarismo das centenas, resulta $5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$ valores.

O total de números, de acordo com o enunciado, é $62 + 150 = 212$.

13 D

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/6$ e) $\pi/12$

Resolução

Sendo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$*, temos:*

$$\frac{1}{2}\,.\,tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\,.\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right).\ sec\ x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,.\,cotg\ x - \frac{\sqrt{3}}{cos\ x}\,.\left[\frac{1 + cos\ x}{2} - \frac{1}{2}\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,.\,cotg\ x - \frac{\sqrt{3}}{cos\ x}\,.\left[\frac{cos\ x}{2}\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,.\,cotg\ x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow cotg\ x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{tg\ x} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow tg\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

Assim, o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade é $\dfrac{\pi}{6}$.

 C

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{ x_k = \text{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = \text{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\,\pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\}.$$

a) 0 b) 1 c) 2

d) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$ e) $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)/3$

Resolução

Sendo:

$$A = \left\{ x_k = sen^2\left(\frac{k^2 . \pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 = sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) : x_2 = sen^2\left(\frac{4\pi}{24}\right) \right\}$$

$$B = \left\{ y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5). \pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\} =$$

$$= \left\{ y_1 = sen^2\left(\frac{8. \pi}{24}\right) ; y_2 = sen^2\left(\frac{11. \pi}{24}\right) \right\}$$

temos:

$A \cup B = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$

Portanto:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 =$

$$= sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{4\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{8\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right) =$$

$$= \underbrace{sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)}_{1} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2$$

15 C

Sejam A = (a_{jk}) e B = (b_{jk}), duas matrizes quadradas n x n, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por

$a_{jk} = \binom{j}{k}$, quando $j \geq k$, $a_{jk} = \binom{k}{j}$, quando $j < k$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem n x n é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de A + B é igual a

a) n (n – 1)/3.

b) (n – 1) (n + 1)/4.

c) $(n^2 - 3n + 2)/(n - 2)$.

d) 3(n – 1)/n.

e) (n – 1)/(n – 2)

Resolução

O traço da matriz C = A + B é $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$ *tal que*

$c_{pp} = \binom{p}{p} + (-1)^p$, *pois:*

$$1)\ b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \cdot \binom{jk}{p} = (-2)^0 \cdot \binom{jk}{0} + (-2)^1 \cdot \binom{jk}{1} +$$

$$+ (-2)^2 \cdot \binom{jk}{2} + \ldots + (-2)^{jk} \cdot \binom{jk}{jk} = (1-2)^{jk} = (-1)^{jk}$$

$2)\ a_{jk} = \binom{j}{k}$, *quando j = k.*

Portanto, o traço da matriz C = A + B é

$$\sum_{p=1}^{n} c_{pp} = c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{nn} =$$

$$= \binom{1}{1} + (-1)^1 + \binom{2}{2} + (-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n} + (-1)^n$$

Se n é ímpar, então

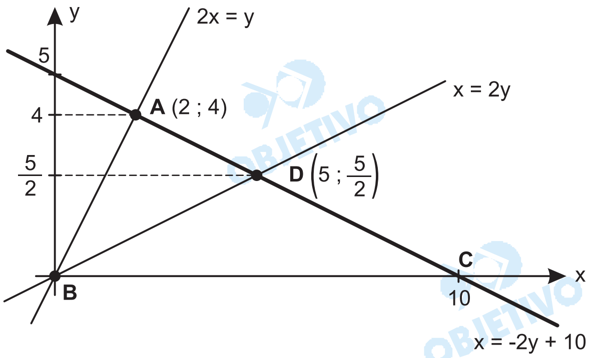
$$\sum_{p=1}^{n} c_{pp} = \binom{1}{1} + \binom{2}{2} + \ldots + \binom{n}{n} + (-1) =$$

$$= n - 1 = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n-2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n-2}$$

Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas 2x = y, x = 2y e x = – 2y + 10. A área desse triângulo mede

a) 15/2. b) 13/4. c) 11/6.
d) 9/4. e) 7/2.

Resolução



I. O ponto A é a intersecção entre as retas de equações 2x = y e x= –2y + 10 e, portanto, suas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2x = y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore A\ (2;\ 4)$$

II. O ponto D é a intersecção entre as retas de equações x = 2y e x = –2y + 10 e, portanto, suas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \therefore D\left(5;\ \dfrac{5}{2}\right)$$

III. Sendo S a área do triângulo ABD, delimitado pelas retas 2x = y, x = 2y e x = –2y + 10, temos:

$$S = S_{ABC} - S_{BCD} = \frac{10\ .\ 4}{2} - \frac{10\ .\ \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{2}$$

Sejam A:(a, 0), B:(0, a) e C:(a, a), pontos do plano cartesiano, em que *a* é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P:(x, y) cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Resolução

Sendo A(a;0), B(0;a), C(a;a) e P(x;y), temos:

1º) reta AB: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x + y - a = 0$

2º) distância de P à reta AB:

$$d_{P,AB} = \frac{|x + y - a|}{\sqrt{2}}$$

3º) distância entre os pontos P e C:

$$d_{P,C} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2}$$

4º) $d_{P,AB} = d_{P,C} \Rightarrow \dfrac{|x + y - a|}{\sqrt{2}} =$

$$= \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y - a)^2 = 2 \,.\, [(x - a)^2 + (y - a)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$$

Seja P_n um polígono regular de n lados, com n > 2. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades

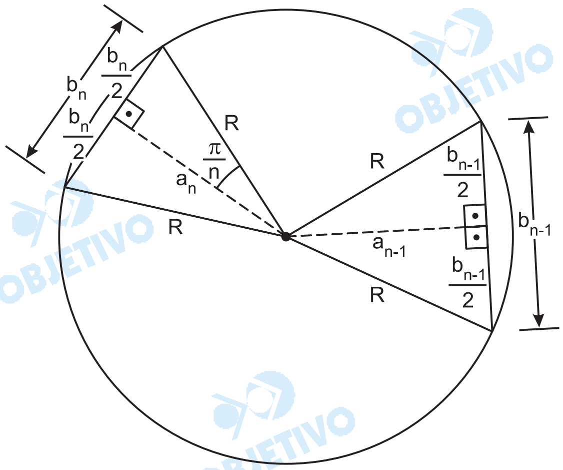
$$b_n \le a_n \text{ e } b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

a) 3 < n < 7. b) 6 < n < 9. c) 8 < n < 11.
d) 10 < n < 13. e) 12 < n < 15.

Resolução

1) *Sem perda de generalidade, consideremos dois polígonos (de (n – 1) e n lados), inscritos no mesmo círculo de raio R, como se vê na figura seguinte.*



em que $tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{\frac{b_n}{2}}{a_n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b_n}{a_n}$

e de modo análogo, $tg\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$

2) *De* $0 < b_n \le a_n$ *e* $b_{n-1} > a_{n-1} > 0$, *tem-se:*

2.1) $\dfrac{b_n}{a_n} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b_n}{a_n} \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \le \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3} = tg\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

assim: $\dfrac{\pi}{n} < \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow n > 6$ **(I)**

2.2) $\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right) > \dfrac{1}{2} > \sqrt{2} - 1 = tg\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

assim: $\dfrac{\pi}{n-1} > \dfrac{\pi}{8} \Leftrightarrow n - 1 < 8 \Leftrightarrow n < 9$ **(II)**

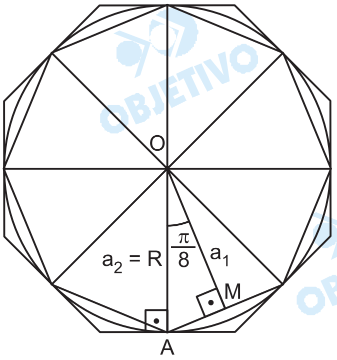
3) *De (I) e (II), tem-se, finalmente:* $6 < n < 9$

 E

Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1 / A_2 é igual a

a) $\sqrt{5/8}$.   b) $9\sqrt{2}/16$.   c) $2(\sqrt{2} - 1)$.
d) $(4\sqrt{2} + 1)/8$.   e) $(2 + \sqrt{2})/4$.

Resolução



Sejam a_1 e a_2 = R as medidas dos apótemas dos octógonos P_1 e P_2, respectivamente.

Como cos (2x) = 2 . cos²x – 1, temos

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \text{ pois}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$$

No triângulo AOM, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{a_1}{R} \Rightarrow \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{a_1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = R\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

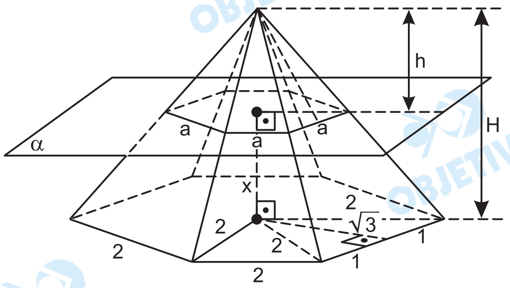
Assim,

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}{R}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

a) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.
b) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})/3$.
c) $(3\sqrt{3} - \sqrt{6})/21$.
d) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})/6$.
e) $(2\sqrt{6} - \sqrt{2})/22$.

Resolução



*Sendo **a** a medida, em centímetros, de cada aresta da base menor do tronco e **x** a medida, em centímetros, da altura do tronco, temos:*

1º) $\dfrac{a}{2} = \dfrac{h}{H} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$

2º) *A área da base maior, em centímetros quadrados, é:*

$$A_B = \frac{6 \cdot 2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

3º) *A área da base menor, em centímetros quadrados, é:*

$$A_b = \frac{6 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

4º) *O volume do tronco, em centímetros cúbicos, é dado por:*

$$V = \frac{x}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) =$$

$$= \frac{x}{3}\left(6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}\right) = x\left(3\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$$

Assim:

$$x\left(3\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3} + \sqrt{6}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{21}$$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21

Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjuntos de números reais tais que

$$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \geq 2\},$$
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\},$$
$$A \cap C = \{x \in \mathbb{R}: \log(x + 4) \leq 0\},$$
$$B \cap C = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq 2x + 7 < 2\}.$$

Resolução

Considerando-se que:

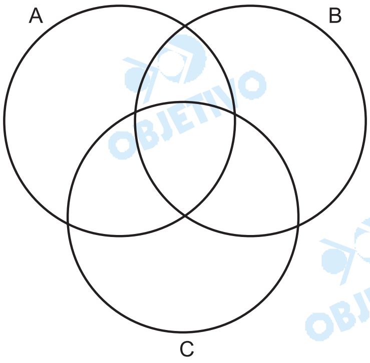
1) $x^2 + x \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ *ou* $x \geq 1$

2) $8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2^{-2x} - 3 \cdot 2^{-x} - 4 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{-x} > 2^2$ *ou* $2^{-x} < -1 \Leftrightarrow x < -2$

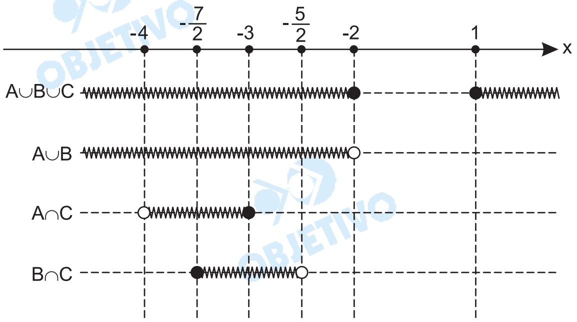
3) $\log(x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -4 < x \leq -3$

4) $0 \leq 2x + 7 < 2 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2} \leq x < -\dfrac{5}{2}$

5) $\left[(A \cup B \cup C) - (A \cup B)\right] \cup \left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right] = C$



6)



pode-se concluir que

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -\dfrac{5}{2}$ *ou* $x = -2$ *ou* $x \geq 1\}$

Resposta: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -\dfrac{5}{2}$ *ou* $x = -2$ *ou* $x \geq 1\}$

22

Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\bar{z}}{z - 2i} + \frac{2z}{\bar{z} + 2i} = 3 \text{ e } 0 < |z - 2i| \le 1.$$

Resolução

Se $z = a + bi$, então

$$1) \quad \frac{a - bi}{a + bi - 2i} + \frac{2a + 2bi}{a - bi + 2i} = 3$$

$$(a - bi).(a - bi + 2i) + (a - bi).(a - bi + 2i) +$$

$$+ (a + bi - 2i).(2a + 2bi) = 3(a + bi - 2i).(a - bi + 2i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3a^2 - 3b^2 + 6b) + 2a(b - i)i = 3a^2 + 3b^2 - 12b + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 3b^2 + 6b = 3a^2 + 3b^2 - 12b + 12 \\ 2a(b - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3b + 2 = 0 \\ a = 0 \text{ ou } b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ ou } b = 2 \\ a = 0 \text{ ou } b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \text{ e } b = 1) \text{ ou } (a = 0 \text{ e } b = 2) \text{ ou } a \in \mathbb{R} \text{ e } b = 1$$

$$2) \quad 0 < |a + bi - 2i| \le 1 \Leftrightarrow 0 < a^2 + (b - 2)^2 \le 1$$

De (1) e (2), temos: $a = 0$ e $b = 1$ e, portanto, $z = i$

Resposta: *$A = \{i\}$*

23

Seja k um número inteiro positivo e

$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \le k \text{ e } \mathrm{mdc}(j, k) = 1\}$.

Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Resolução

*$A_k = \{j \in \mathbb{N} ; j \le k$ e mdc $(j; k) = 1\}$ e **k** um número inteiro positivo, então $n(A_k) = k - \dfrac{k}{3}$, quando **k** é múltiplo de 3.*

Assim: $n(A_3) = 3 - \dfrac{3}{3} = 2$, $n(A_9) = 9 - \dfrac{9}{3} = 6$,

$n(A_{27}) = 27 - \dfrac{27}{3} = 18$ e $n(A_{81}) = 81 - \dfrac{81}{3} = 54$.

Como $\dfrac{n(A_9)}{n(A_3)} = \dfrac{n(A_{27})}{n(A_9)} = \dfrac{n(A_{81})}{n(A_{27})} = 3$, os números $n(A_3) = 2$, $n(A_9) = 6$, $n(A_{27}) = 18$ e $n(A_{81}) = 54$, nesta ordem, estão em progressão geométrica de razão 3.

Resposta: *Estão em progressão geométrica, de razão 3.*

Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raizes reais?

b) Determine todas essas raízes reais.

Resolução

Sendo $x \geq 1$ (I), temos:

$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - p) + 4\sqrt{(x^2 - p).(x^2 - 1)} + 4.(x^2 - 1) = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x^2 - p).(x^2 - 1)} = p - 4(x^2 - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16(x^2 - p)(x^2 - 1) =$

$= p^2 - 8p(x^2 - 1) + 16(x^2 - 1)^2$, *se*

$x^2 \leq \dfrac{p + 4}{4}$ e $x^2 - p \geq 0$ (II)

Assim:

$16x^4 - 16x^2 - 16px^2 + 16p =$

$= p^2 - 8px^2 + 8p + 16x^4 - 32x^2 + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 8px^2 = p^2 - 8p + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{(4 - p)^2}{8(2 - p)} \Leftrightarrow x = \dfrac{|4 - p|}{2\sqrt{4 - 2p}}$, *pois* $x \geq 1$

Para que a equação admita raízes reais, devemos ter:

$$\begin{cases} 4 - 2p > 0 \\ p \leq x^2 \leq \dfrac{p + 4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 2 \\ p \leq x^2 \\ x^2 \leq \dfrac{p + 4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 2 \\ p \leq \dfrac{(4 - p)^2}{8(2 - p)} \\ \dfrac{(4 - p)^2}{8(2 - p)} \leq \dfrac{p + 4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 2 \\ p(3p - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 2 \\ 0 \leq p \leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq p \leq \dfrac{4}{3}$$

Respostas: *a)* $0 \leq p \leq \dfrac{4}{3}$ *b)* $x = \dfrac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}$

Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\log[(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 0,$$
$$2^{x+3z} - 8 \,.\, 2^{y-3z+w} = 0,$$
$$\sqrt[3]{2x + y + 6z - 2w - 2} = 0.$$

Resolução

1) $\log[(x+2y)\,(w-3z)^{-1})] = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2y)}{w-3z} = 1 \Leftrightarrow x + 2y = w - 3z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 3z = w \qquad \textbf{(I)}$$

2) $2^{x+3z} - 8 \,.\, 2^{y-3z+w} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{x+3z} = 2^{3+y-3z+w} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 3z = 3 + y - 3z + w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - y + 6z = 3 + w \qquad \textbf{(II)}$$

3) $\sqrt[3]{2x + y + 6z - 2w - 2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 6z - 2w = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x + y + 6z = 2w + 8 \qquad \textbf{(III)}$$

De (I), (II) e (III), fazendo w = k, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = k \\ x - y + 6z = 3 + k \\ 2x + y + 6z = 2k + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = k \\ -x - 5y = 3 - k \Leftrightarrow \\ -3y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = k \\ -x - 5y = 3 - k \\ y = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31 + 3k}{3} \\ y = -\dfrac{8}{3} \\ z = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{31}{3} + k \quad y = -\frac{8}{3} \quad z = -\frac{5}{3} \quad w = k,\ \forall k \neq -5}$$

Resposta: $(x, y, z, w) = \left(\dfrac{31}{3} + k, -\dfrac{8}{3}, -\dfrac{5}{3}, k\right), \forall k \neq -5$

26

Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

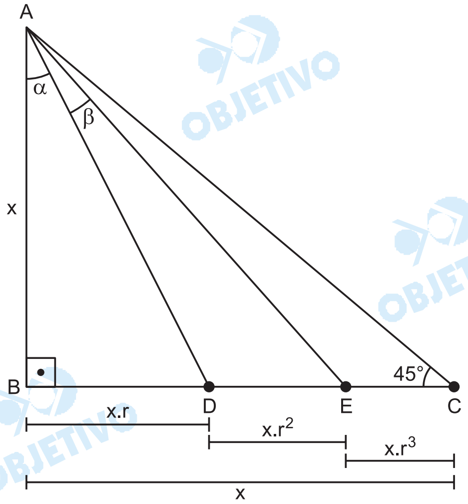
Resolução

Das $C_{9,5} = 126$ comissões possíveis sem nenhuma restrição, só não serve aquela constituída pelos cinco rapazes. Logo, tal comissão poderá ser formada de $126 - 1 = 125$ formas distintas.

Resposta: *125 formas distintas*

Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo $E\hat{A}D$, determine tg β em função da razão r da progressão.

Resolução



Sendo AB = BC = x e BC, BD, DE e EC, nesta ordem, termos de uma progressão geométrica decrescente de razão r, temos: $BD = xr$, $DE = xr^2$ e $EC = xr^3$

I) No triângulo ABD:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{xr}{x} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = r$$

II) No triângulo ABE:

$$\text{tg}\,(\alpha + B) = \frac{xr + xr^2}{x} \Leftrightarrow \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,.\,\text{tg}\,\beta} = r + r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r + \text{tg}\,\beta}{1 - r\,\text{tg}\,\beta} = r + r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r + \text{tg}\,\beta = r + r^2 - r^2\,\text{tg}\,\beta - r^3\,\text{tg}\,\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\beta + r^2\,\text{tg}\,\beta + r^3\,\text{tg}\,\beta = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{r^2}{1 + r^2 + r^3} \quad (I)$$

Por outro lado, tem-se:

$$x = xr + xr^2 + xr^3 \Leftrightarrow r^2 + r^3 = 1 - r \qquad (II)$$

De (I) e (II), tem-se finalmente:

$$\text{tg}\,\beta = \Leftrightarrow \frac{r^2}{1 + (1 - r)} \Leftrightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{r^2}{2 - r}$$

Resposta: $\text{tg}\,\beta = \dfrac{r^2}{2 - r}$

Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em P:(5, 10). O ponto Q:(10, 12) é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação x = y.

Resolução

1º) Sendo Q(10;12) o centro de C_1 e T(5;10) o ponto de tangência das circunferências, temos:

$$TQ = \sqrt{(10-5)^2 + (12-10)^2} = \sqrt{29}, \text{ como raio de } C_1.$$

2º) A distância de Q(10;12) à reta x – y = 0 é

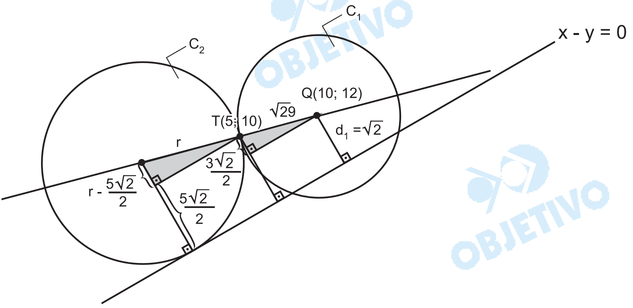
$$d_1 = \frac{|12-10|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3º) A distância de T(5;10) à reta x – y = 0 é

$$d_2 = \frac{|10-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Portanto, } d_2 - d_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

4º) Sendo semelhantes os triângulos assinalados na figura, temos:



$$\frac{r}{\sqrt{29}} = \frac{r - \frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{29} \cdot r - \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{29}}{2} = \frac{r \cdot 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \cdot (2\sqrt{29} - 3\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{29} \Leftrightarrow$$

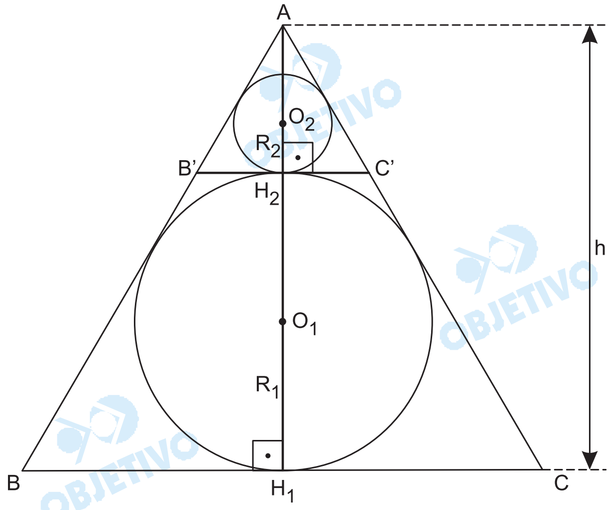
$$\Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{29} \cdot (2\sqrt{29} + 3\sqrt{2})}{(2\sqrt{29} - 3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{29} + 3\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{290\sqrt{2} + 30\sqrt{29}}{98} = \frac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}$$

Resposta: $\dfrac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}$

Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Resolução



Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1 e C_2, respectivamente.
Como o triângulo ABC é eqüilátero, temos:

$$R_1 = \frac{h}{3} \text{ e portanto } AH_2 = \frac{h}{3}$$

O triângulo AB'C' é eqüilátero, pois é semelhante ao triângulo ABC e, portanto,

$$R_2 = \frac{1}{3} \cdot AH_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{9}$$

Logo,

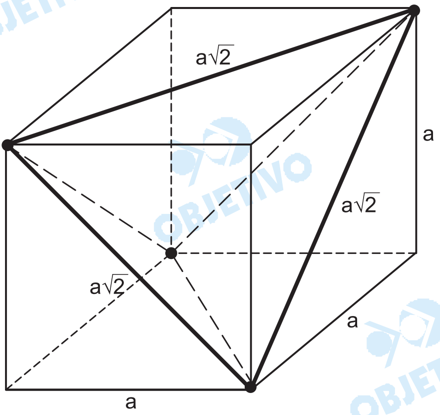
$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{3h - h}{9h} = \frac{2}{9}$$

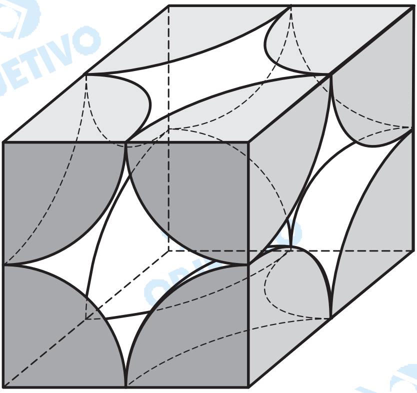
Resposta: $\dfrac{R_1 - R_2}{h} = \dfrac{2}{9}$

30

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\ cm^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

Resolução





*1º) Se **a** for a medida (em centímetros) de cada aresta do cubo, então cada aresta do tetraedro regular terá medida (em centímetros) igual a **a√2** e seu volume (em centímetros cúbicos) será expresso por*

$$\frac{(a\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3}$$

Assim: $\dfrac{a^3}{3} = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow a = 2$

2º) O volume da parte do cubo exterior às esferas é igual à diferença entre o volume do cubo e oito oitavos do volume de uma dessas esferas.
Assim, sendo V o volume procurado, em centímetros cúbicos, tem-se:

$$V = 2^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{24 - 4\pi}{3} = \frac{4\,(6 - \pi)}{3}$$

Resposta: $\dfrac{4\,(6 - \pi)}{3}\ cm^3$

Comentário e Gráfico

Prova extremamente longa, composta de questões difíceis e que exigiram dos candidatos mais bem preparados muita energia e determinação nas extensas resoluções.