

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ \mathbb{Z} : conjunto dos números inteiros \mathbb{R} : conjunto dos números reais \mathbb{C} : conjunto dos números complexos \emptyset : conjunto vazio $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ $[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ $(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ $A - B = \{x \in A; x \notin B\}$	i : unidade imaginária; $i^2 = -1$ $ z $: módulo do número $z \in \mathbb{C}$ \bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Im} z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$ I : matriz identidade A^{-1} : inversa da matriz inversível A A^t : transposta da matriz A $\det A$: determinante da matriz A A^C : complementar de A
--	---

$\mathcal{P}(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A

\overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B

\widehat{AB} : arco de circunferência de extremidades A e B

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 1. Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

A () $\frac{1}{21}$
 B () $\frac{1}{8}$
 C () $\frac{3}{21}$
 D () $\frac{5}{21}$
 E () $\frac{1}{4}$

Questão 2. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

A () -2
 B () 0
 C () 1
 D () 2
 E () $2i$

Questão 3. Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

A () -4
 B () -3
 C () 0
 D () 1
 E () 4

Questão 4. Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

A () 3^n **B** () $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$ **C** () $\frac{1}{5}$ **D** () $\frac{3^{n-1}}{5}$ **E** () $5 \cdot 3^{n-1}$

Questão 5. Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

A () 30 **B** () 32 **C** () 34 **D** () 36 **E** () 38

Questão 6. Um diedro mede 120° . A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

A () $3\sqrt{3}$ **B** () $3\sqrt{2}$ **C** () $2\sqrt{3}$ **D** () $2\sqrt{2}$ **E** () 2

Questão 7. Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado \overline{AB} e N um ponto sobre o lado \overline{AD} , equidistantes de A . Por M traça-se uma reta r paralela ao lado \overline{AD} e por N uma reta s paralela ao lado \overline{AB} , que se interceptam no ponto O . Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado \overline{BC} e Q é a intersecção de r com o lado \overline{DC} . Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

A () $15 + 5\sqrt{5}$ **B** () $10 + 5\sqrt{5}$ **C** () $10 - \sqrt{5}$
D () $15 - 5\sqrt{5}$ **E** () $10 - 3\sqrt{5}$

Questão 8. Considere o polinômio $p(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a

A () -25 **B** () -27 **C** () -36 **D** () -39 **E** () -40

Questão 9. Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

A () -1 **B** () 1 **C** () 2 **D** () 3 **E** () 4

Questão 10. É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$$

com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a

- A** () -2 **B** () 4 **C** () 6 **D** () 9 **E** () 12

Questão 11. Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arccosseno, assinale o valor de

$$\cos \left(\arcsen \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5} \right).$$

- A** () $\frac{1}{\sqrt{12}}$ **B** () $\frac{7}{25}$ **C** () $\frac{4}{15}$ **D** () $\frac{1}{\sqrt{15}}$ **E** () $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Questão 12. Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

- A** () $y = \sqrt{3}(x - 1)$ **B** () $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ **C** () $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$
D () $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x - 7)$ **E** () $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x - 4)$

Questão 13. O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

- A** () $[-3, 3]$ e 2π **B** () $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ **C** () $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$
D () $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$ **E** () $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Questão 14. Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é

- A** () $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$
B () $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$
C () $\left\{0, \frac{1}{2} \log_5 2, \frac{1}{2} \log_5 3, \log_5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$
D () $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$
E () A única solução é $x = 0$

Questão 15. Um subconjunto D de \mathbb{R} tal que a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

- A** () \mathbb{R} **B** () $(-\infty, 1]$ **C** () $[0, 1/2]$ **D** () $(0, 1)$ **E** () $[1/2, \infty)$

Questão 16. A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0,$$

que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

- A** () 2π **B** () $\frac{23}{12}\pi$ **C** () $\frac{9}{6}\pi$ **D** () $\frac{7}{6}\pi$ **E** () $\frac{13}{12}\pi$

Questão 17. Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset \mathcal{P}(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

- A** () $\frac{1}{730}$ **B** () $\frac{46}{33\,215}$ **C** () $\frac{1}{365}$ **D** () $\frac{92}{33\,215}$ **E** () $\frac{91}{730}$

Questão 18. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}$, mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\hat{A}\hat{C}E = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $\hat{D}\hat{B}\hat{C} = 35^\circ$. Então, o ângulo $\hat{E}\hat{D}\hat{B}$ vale

- A** () 35° **B** () 45° **C** () 55° **D** () 75° **E** () 85°

Questão 19. Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de \mathbb{N} tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

- A** () $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **B** () $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ **C** () $\{1, 3, 7, 8\}$
D () $\{1, 3\}$ **E** () $\{7, 8\}$

Questão 20. Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r . As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s , são iguais a

- A** () $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$ **B** () $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$ **C** () $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$
D () $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$ **E** () 700 e $10\sqrt{21}$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Questão 22. Determine as raízes em \mathbb{C} de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z + 2| < 3\}.$$

Questão 23. Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Questão 24. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Questão 25. Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Questão 26. Determine todos os valores $\alpha \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

admita apenas raízes reais simples.

Questão 27. Em um espaço amostral com uma probabilidade P , são dados os eventos A, B e C tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^c)$.

Questão 28. Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que \overline{AB} mede $2\sqrt{5}$ e \overline{BC} mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC .

Questão 29. Seja C uma circunferência de raio r e centro O e \overline{AB} um diâmetro de C . Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C . Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A . Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco \widehat{AE} e pelos segmentos \overline{AF} e \overline{EF} em torno do diâmetro \overline{AB} .

Questão 30. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5)$, $(-1, 2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2, 5)$.