NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i: unidade imaginária, $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

Re(z): parte real do número $z \in \mathbb{C}$

det A : determinante da matriz A

A^t: transposta da matriz A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

n(A): número de elementos do conjunto finito A

P(A): probabilidade de ocorrência do evento A

f o g : função composta das funções f e g

$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

$]a, b]$: $\{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$A \backslash B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 E

Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f:[a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II. b) apenas I e III.

c) apenas II e III. d) apenas III.

e) nenhuma.

Resolução

I) ***Falsa***

Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então x e y são irracionais. Nos exemplos abaixo, os números x e y são irracionais, mas a soma deles é racional.

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ pois } 2 \in \mathbb{Q}.$$

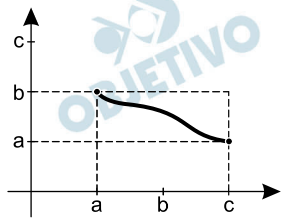
II) ***Falsa***

Se $x \in \mathbb{Q}$, então x pode ser nulo. Neste caso, $x \,.\, y = 0$ e $x \,.\, y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow xy \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

III) ***Falsa***

Considere a função f: [a; c] → [a; b], estritamente decrescente no intervalo [a; c], definida pelo gráfico a seguir. Ela é injetora, pois é estritamente decrescente, e é sobrejetora, pois

Im(f) = [a; b] = CD(f).



Considere as funções f, g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + m$, $g(x) = bx + n$, em que a, b, m e n, são constantes reais. Se A e B são as imagens de f e de g, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se A = B, então a = b e m = n;

II. Se $A = \mathbb{Z}$, então a = 1;

III. Se a, b, m, n $\in \mathbb{Z}$, com a = b e m = – n, então A = B,

é (são) verdadeira(s)

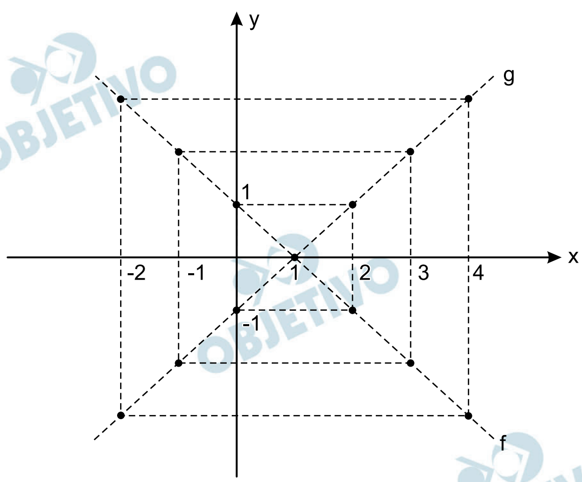
a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) nenhuma.

Resolução

I) ***Falsa.***

Considere as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -x + 1$ e $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid g(x) = x - 1$; notemos que $a \neq b$, pois $a = -1$ e $b = 1$, e $m \neq n$, pois $m = 1$ e $n = -1$

Como se vê no gráfico a seguir, ambas possuem o mesmo conjunto imagem $\mathbb{Z}$.



II) ***Falsa.***

Na função f do primeiro item, a = – 1, apesar de $A = \mathbb{Z}$.

III) ***Falsa.***

Considere as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 3x + 1$ e $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid g(x) = 3x - 1$, Neste caso, temos: $a = b$ e $m = -n$.

Veja que $1 \in Im(f)$, pois $f(0) = 1$, e $1 \notin Im(g)$, pois

$$g(x) = 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \notin D(g) = \mathbb{Z}$$

Se $1 \in Im(f) = A$ e $1 \notin Im(g) = B$, então $A \neq B$.

A soma $\sum_{n=1}^{4} \dfrac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$ é igual a

a) $\dfrac{8}{9}$.
b) $\dfrac{14}{15}$.
c) $\dfrac{15}{16}$.
d) $\dfrac{17}{18}$.
e) 1.

Resolução

I) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[n]{32}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 32 = \dfrac{1}{n} \cdot (-5) = -\dfrac{5}{n}$

II) $\log_{\frac{1}{2}} (8^{n+2}) = (n+2) \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8 =$

$= (n+2) \cdot (-3) = -3(n+2)$

III) $\sum_{n=1}^{4} \dfrac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}} = \sum_{n=1}^{4} \dfrac{-\dfrac{5}{n}}{-3(n+2)} =$

$= \sum_{n=1}^{4} \dfrac{5}{3n(n+2)} = \dfrac{5}{3} \cdot \sum_{n=1}^{4} \dfrac{1}{n(n+2)} =$

$= \dfrac{5}{3} \cdot \left[\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{24}\right] =$

$= \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{40 + 15 + 8 + 5}{120} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{68}{120} =$

$= \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{17}{30} = \dfrac{17}{18}$

Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3\,|z|^4\,(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6$ é igual a

a) $(z^2 - \overline{z}^2)^3$.
b) $z^6 - \overline{z}^6$.
c) $(z^3 - \overline{z}^3)^2$.
d) $(z - \overline{z})^6$.
e) $(z - \overline{z})^2\,(z^4 - \overline{z}^4)$.

Resolução

Lembrando que $|z|^2 = z\,.\,\overline{z}$, temos: $|z|^4 = z^2\,.\,\overline{z}^2$

Assim:

$$z^6 - 3\,|z|^4\,(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6 = z^6 - 3\,.\,z^2\,.\,\overline{z}^2\,.\,(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6 =$$

$$= z^6 - 3z^4 \cdot \overline{z}^2 + 3\,z^2\,\overline{z}^4 - \overline{z}^6 = (z^2 - \overline{z}^2)^3$$

Sejam z, w ∈ ℂ. Das afirmações:

I. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

II. $(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 = 4z\overline{w}$;

III. $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$,

é (são) verdadeira (s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

Resolução

Consideremos os números complexos
$z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais.
Temos $|z|^2 = a^2 + b^2$, $|w|^2 = c^2 + d^2$,
$z + w = (a + c) + (b + d)i$, $z - w = (a - c) + (b - d)i$
$|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$ e
$|z - w|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$
Assim, temos:

I) ***Verdadeira***

$|z + w|^2 + |z - w|^2 =$
$= [(a + c)^2 + (b + d)^2] + [(a - c)^2 + (b - d)^2] =$
$= 2a^2 + 2c^2 + 2b^2 + 2d^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

II) ***Verdadeira***

$(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 =$
$= (z^2 + 2z\overline{w} + \overline{w}^2) - (z^2 - 2z\overline{w} + \overline{w}^2) = 4z\overline{w}$

III) ***Verdadeira***

$|z + w|^2 - |z - w|^2 =$
$= [(a + c)^2 + (b + d)^2] - [(a - c)^2 + (b - d)^2] =$
$= 4ac + 4bd = 4\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$, **pois**
$z\overline{w} = (a + bi) \cdot (c - di) = (ac + bd) + (bc - ad)i$ **e**
$\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) = ac + bd$

 C

Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$.

b) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$.

c) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$.

d) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

e) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$.

Resolução

I) O conjunto solução da equação
$x^5 + 0 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + 0 = 0$ **é**

$$V = \left\{a - 1; a - \frac{1}{2}; a; a + \frac{1}{2}; a + 1\right\}, \text{ com}$$

$$(a - 1) + \left(a - \frac{1}{2}\right) + a + \left(a + \frac{1}{2}\right) + (a + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

II) $V = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

III) O polinômio p, na forma fatorada, é

$$p(x) = 1 \cdot (x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 0)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x\,(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x\left(x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$$

IV) $x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_3 = -\frac{5}{4}, a_2 = 0, a_1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$$

Para os inteiros positivos k e n, com k ≤ n, sabe-se que

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

a) $2^n + 1$. b) $2^{n+1} + 1$. c) $\dfrac{2^{n+1}+1}{n}$.

d) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. e) $\dfrac{2^n-1}{n}$.

Resolução

Sendo $S = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$, **temos:**

$$(n+1)S = \frac{n+1}{1}\binom{n}{0} + \frac{n+1}{2}\binom{n}{1} + \frac{n+1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{n+1}{n}\binom{n}{n-1} + \frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)S = \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \ldots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)S = 2^{n+1} - \binom{n+1}{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)S = 2^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.

d) apenas II e III. e) todas.

Resolução

I) *Verdadeira.*

(1) **Se B é antissimétrica, então $B^t = -B = -1 . B$ e $\det(B^t) = \det(-1 . B) = (-1)^n . \det B = \det B$, pois o determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta.**

(2) **Se o produto AB for inversível, então:**
$\det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det A . \det B \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det A \neq 0$ **e** $\det B \neq 0$

(3) **Dos itens (1) e (2), temos:**
$(-1)^n . \det B = \det B \Leftrightarrow (-1)^n = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$ **e, portanto, n é par.**

II) *Falsa.*

Se A é inversível e AB não é inversível, então $\det B = 0$, pois $\det A \neq 0$ e $\det(AB) = 0$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \end{bmatrix}$**, com a, b e c**

não necessariamente nulos, é antissimétrica e $\det B = 0$, porém, neste caso, n = 4 (par).

III) *Verdadeira.*

Se B for inversível, então $\det B \neq 0$; sendo assim, da igualdade $(-1)^n . \det B = \det B$, teremos:

$(-1)^n = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$ **e, portanto, n é par.**

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$

matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica.

Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível ;

III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1\ x_2\ x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II. b) apenas II e III.

c) apenas I. d) apenas II.

e) apenas III.

Resolução

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x+1-y+2+z+3 & x-y+z \\ y(x+1)-x(y-2)+z+3 & xy-xy+z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x-y+z+6 & x-y+z \\ 2x+y+z+3 & z \end{bmatrix}$$

Se AB é antissimétrica, então:

$$(AB) = -(AB)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x-y+z+6 & x-y+z \\ 2x+y+z+3 & z \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} x-y+z+6 & 2x+y+z+3 \\ x-y+z & z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+6=0 \\ z=0 \\ 2x+y+z+3=-(x-y+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

I) Falsa, pois $BA \neq -(BA)^t$

II) Verdadeira, pois $\det BA = 0$

III) Verdadeira, pois $(BA)\,X = 0$

com $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ **sendo um sistema linear homogêneo e, como** $\det(BA) = 0$**, o sistema admite infinitas soluções, além da solução trivial.**

Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}\,M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{4}{5}$. e) $\frac{5}{4}$.

Resolução

$$\mathbf{\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}\,M^3) = \frac{2}{9}\det(3M) \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 2^3(\det M)^2 - (\sqrt[3]{2})^3(\det M)^3 = \frac{2}{9} \cdot 3^3 \det M \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 8(\det M)^2 - 2 \cdot (\det M)^3 = 6 \det M \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 8\det M - 2 \cdot (\det M)^2 = 6 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (\det M)^2 - 4\det M + 3 = 0 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \det M = 3 \text{ ou } \det M = 1 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{3} \text{ ou } \det M^{-1} = 1}$$

Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2},\ 0,\ -3\sqrt{2}$.

b) $-2\sqrt{2},\ 0,\ -3\sqrt{2}$.

c) $0,\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$.

d) $0,\ 2\sqrt{3},\ \sqrt{3}$.

e) $2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0$.

Resolução

I) Fazendo $e^{2t} = a \Leftrightarrow e^{-2t} = \dfrac{1}{a}$ na matriz

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e sendo } \det A(t) = 1,$$

com $t \neq 0$, tem-se:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2}{a} & -a & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 2$$

II) $e^{2t} = a \Rightarrow e^{2t} = 1$ ou $e^{2t} = 2 \Rightarrow e^{2t} = 2$, pois $t \neq 0$

III) $e^{2t} = 2 \Rightarrow e^t = \sqrt{2}$

IV) $A(t).X = B(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = \sqrt{2} \\ -x + y + z = -\sqrt{2} \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = \sqrt{2} \\ y = 0 \\ -3x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = 0 \\ z = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

 A

Considere o polinômio complexo
$p(z) = z^4 + a\,z^3 + 5\,z^2 - i\,z - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que 2i é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

a) $-3i, -1, 1$. b) $-i, i, 1$. c) $-i, i, -1$.
d) $-2i, -1, 1$. e) $-2i, -i, i$.

Resolução

I) Já que 2i é raiz da equação, temos:

$$(2i)^4 + a\,.\,(2i)^3 + 5\,.\,(2i)^2 - i\,(2i) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16 - 8ai - 20 + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow -8ia = 8 \Leftrightarrow a = i$$

II) O polinômio p(z) é divisível por z – 2i e, portanto:

$$\begin{array}{l|l} z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6 & z - 2i \\ \hline \quad\quad 0 & z^3 + 3iz^2 - z - 3i \end{array}$$

III) $z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6 = 0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (z - 2i)\,(z^3 + 3iz^2 - z - 3i) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z - 2i)\,(z^2 - 1)\,(z + 3i) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z = -3i$$

IV) As outras raízes de p(z) = 0 são – 3i, – 1, 1

Sabendo que sen x = $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, a ≠ 0 e b ≠ 0, um possível valor para cossec 2x – $\dfrac{1}{2}$ tg x é

a) $\dfrac{a-b}{ab}$. b) $\dfrac{a+b}{2ab}$. c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

d) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$. e) $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$.

Resolução

I) $$\text{sen } x = \frac{2ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

II) $$\text{cossec } (2x) - \frac{1}{2} \text{ tg } x = \frac{1}{2 \text{ sen } x \cos x} - \frac{\text{sen } x}{2 \cos x} =$$

$$= \frac{1 - \text{sen}^2 x}{2 \text{ sen } x \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \text{ sen } x \cos x} = \frac{\cos x}{2 \text{ sen } x}$$

III) $$\text{cossec } (2x) - \frac{1}{2} \text{ tg } x = \frac{\pm \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{2 \cdot \dfrac{2ab}{a^2+b^2}} = \pm \frac{a^2-b^2}{4ab}$$

IV) Um possível valor para cossec (2x) – $\dfrac{1}{2}$ tg x é

$$\frac{a^2-b^2}{4ab}$$

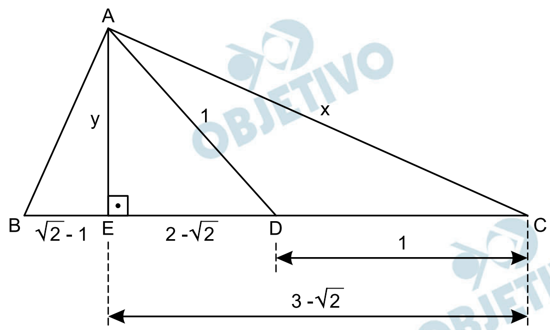
 C

Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2} - 1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

a) $4\sqrt{2} - 5$. b) $3 - \sqrt{2}$. c) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$.

d) $3(\sqrt{2} - 1)$ e) $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$.

Resolução



Sendo x = AC e y = AE, nos triângulos retângulos EDA e ECA, temos, respectivamente:

$y^2 + (2 - \sqrt{2})^2 = 1^2$ **e** $x^2 = y^2 + (3 - \sqrt{2})^2$

Assim:

$x^2 = 1 - (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 = 6 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

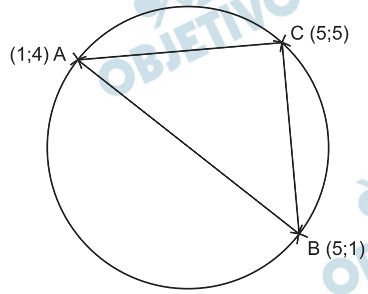
$\Leftrightarrow x = \sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$ **, pois** $x > 0$

Seja ABC um triângulo de vértices A = (1,4), B = (5,1) e C = (5,5). O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

a) $\dfrac{15}{8}$. b) $\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$. c) $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}$.

d) $\dfrac{5\sqrt{17}}{8}$. e) $\dfrac{17\sqrt{5}}{8}$.

Resolução



No triângulo de vértices A(1; 4), B(5; 1) e C(5; 5) e área S, temos:

I) $AB = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = 5$

$AC = \sqrt{(1-5)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (1-5)^2} = 4$

II) $S = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot 16 = 8$

III) Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, vem:

$$S = \frac{(AB) \cdot (AC) \cdot (BC)}{4 \cdot R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 = \frac{5 \cdot \sqrt{17} \cdot 4}{4 \cdot R} \Leftrightarrow R = \frac{5 \cdot \sqrt{17}}{8}$$

Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{97}},$$

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e III.

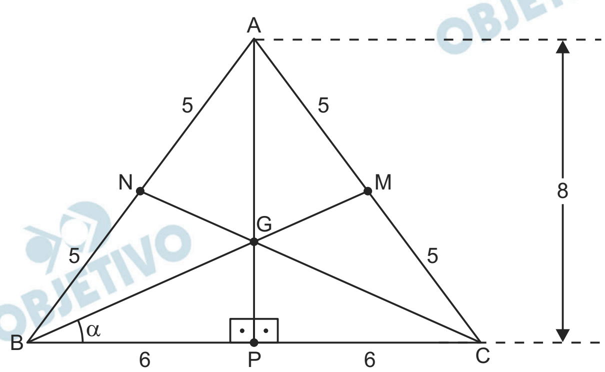
e) apenas II e III.

Resolução

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{AP}{BC} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{BC\,.\,AP}{2} = 48\ cm^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AP = 8\ cm \\ BC = 12\ cm \end{cases}$$

Podemos então montar a seguinte figura, na qual G é o baricentro do triângulo ABC.



Nessa figura, cujas medidas estão expressas em centímetros, podemos afirmar que:

1) $GA = \dfrac{2}{3} \,.\, 8 = \dfrac{16}{3}$

2) $GP = \dfrac{1}{3} \,.\, 8 = \dfrac{8}{3}$

3) $BG = \sqrt{(BP)^2 + (GP)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{97}$

4) $BG = \frac{2}{3} \cdot BM$

Assim: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{97} = \frac{2}{3}\,BM \Leftrightarrow BM = \sqrt{97}$

5) $BM = CN$

Assim: $BM = CN = \sqrt{97}$

6) $\cos\alpha = \frac{BP}{BG} = \frac{6}{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{97}} = \frac{9}{\sqrt{97}}$

Portanto, a afirmação I é verdadeira e as afirmações II e III são falsas.

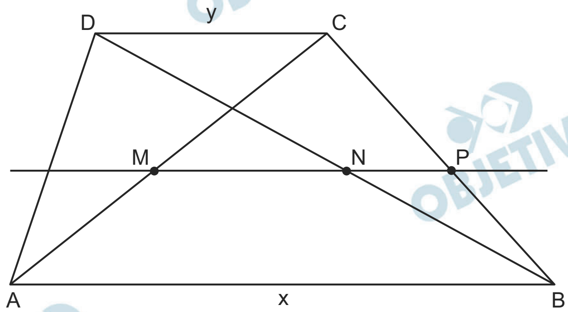
Considere o trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento y < x, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a

a) $x - y$. b) $\frac{1}{2}(x - y)$. c) $\frac{1}{3}(x - y)$.

d) $\frac{1}{3}(x + y)$. e) $\frac{1}{4}(x + y)$.

Resolução

Seja P o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{MN}$ com o lado oblíquo BC do trapézio ABCD.



De acordo com a figura, temos:

I) $\overline{MP}$ é base média no triângulo CAB

Assim: $MP = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow MP = \dfrac{x}{2}$

II) $\overline{NP}$ é base média no triângulo BCD

Assim: $NP = \dfrac{CD}{2} \Leftrightarrow NP = \dfrac{y}{2}$

III) MN + NP = MP

Assim: $MN + \dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow MN = \dfrac{1}{2}(x - y)$

Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume V = 50 cm^3 tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se n – 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas S_i, i = 1,2, ... , n – 2, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}$ cm^2 e $S_6 = 3$ cm^2. Então n é igual a

a) 22. b) 24. c) 26. d) 28. e) 32.

Resolução

I) Se h = 1 cm é a altura da pirâmide e V = 50 cm^3 é seu volume, então a área da sua base é de 150 cm^2.

II) Se $S_3 = \frac{3}{2}$ cm^2 e $S_6 = 3$ cm^2, então podemos concluir que a razão dessa progressão aritmética, em centímetros quadrados, é $r = \dfrac{3 - \frac{3}{2}}{6 - 3} = \dfrac{1}{2}$

Assim, os (n – 2) termos dessa progressão aritmética, em centímetros quadrados, são:

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{2}, S_3 = \frac{3}{2}, \ldots S_{n-2} = \frac{n-2}{2}$$ **e a sua soma é igual a 150.**

Logo: $$\frac{(S_1 + S_{n-2})(n-2)}{2} = 150 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2}\right)(n-2) = 300 \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 598 = 0 \Leftrightarrow n = 26 \text{ ou } n = -23$$

Obs.: A solução n = –23 não serve, pois n ⩾ 5.

A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas r: $2x - 2y + 5 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$ é

a) $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{10}{4}\right)^2 = 4.$

b) $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\right)\right)^2 = 4.$

c) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \dfrac{10}{4}\right)^2 = 4.$

d) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{4}\right)^2 = 4.$

e) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{4}\right)^2 = 4.$

Resolução

I) As retas (r): $2x - 2y + 5 = 0$ e (s): $x + y - 4 = 0$ possuem coeficientes angulares $m_r = 1$ e $m_s = -1$, respectivamente, portanto, são perpendiculares.

II) Sendo $\{P\} = r \cap S$, temos:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 5 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{13}{4}\right)$$

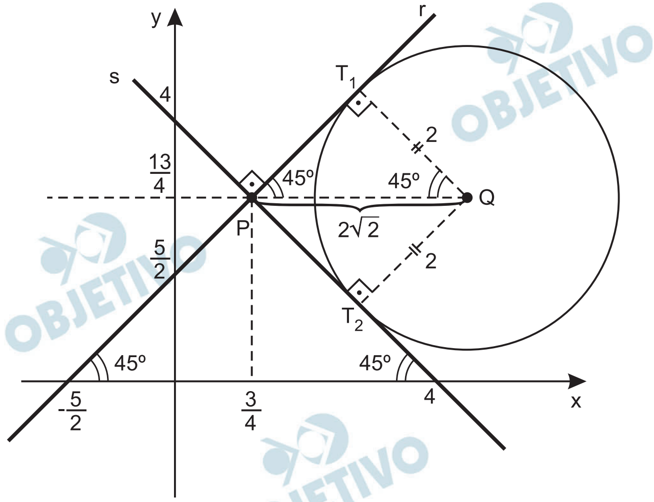
III) Sendo Q (x_Q, y_Q) o centro do círculo de raio 2 localizado no 1º quadrante, tangente simultaneamente às retas r e s, e notando que a diagonal PQ do quadrado PT_1QT_2 é paralela ao eixo x, vem:

$$x_Q = 2\sqrt{2} + \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad y_Q = \frac{13}{4}$$

A equação da circunferência com centro

$Q\left(2\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}; \dfrac{13}{4}\right)$ e raio 2 é

$$\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$$

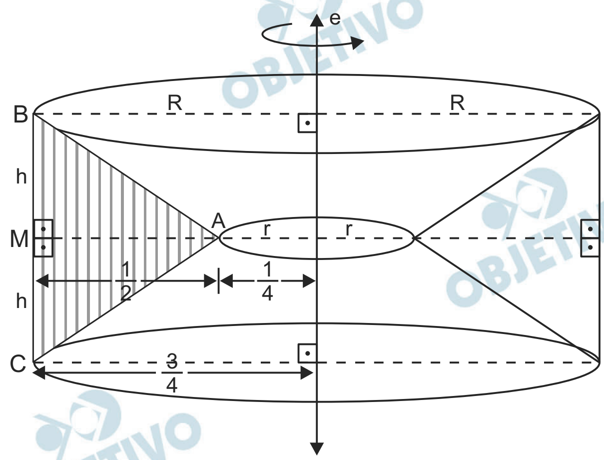


Observação: **Existem três outras circunferências de raio 2, tangentes simultaneamente às retas r e s (com centros nas retas $x = \dfrac{3}{4}$ e $y = \dfrac{13}{4}$), porém, nenhuma delas está contida no 1º quadrante.**

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista 0,25 cm do vértice A e 0,75 cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\dfrac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $\dfrac{9}{16}$. b) $\dfrac{13}{96}$. c) $\dfrac{7}{24}$. d) $\dfrac{9}{24}$. e) $\dfrac{11}{96}$.

Resolução



De acordo com o enunciado, podemos concluir que o volume V (em centímetros cúbicos) do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo isósceles ABC em torno da reta *e*, que é paralela à $\overline{BC}$ e dista $r = \dfrac{1}{4}$ cm do vértice A e $R = \dfrac{3}{4}$ cm da base $\overline{BC}$, é igual à diferença entre o volume de um cilindro circular reto de raio R e altura BC = 2h e a soma dos volumes de dois troncos de cones congruentes e retos de raios R e r e altura h.

Assim:

I) $h^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{\pi^2+1}{4\pi^2} - \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{1}{2\pi}$

II) $V = \pi R^2\, 2h - 2 \cdot \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

Portanto:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{9}{16} - \frac{13}{48} \Leftrightarrow V = \frac{7}{24}$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g \circ f)\,(x) > (f \circ g)\,(x).$$

Resolução

Sendo $\alpha > 0$ e $x \geq 0$, temos:

I) $(gof)\,(x) = g\,[f(x)] = g\,(e^{\alpha x}) = \sqrt{e^{\alpha x}}$

II) $(fog)\,(x) = f\,[g(x)] = f\,(\sqrt{x}) = e^{\alpha\sqrt{x}}$

III) $(gof)\,(x) > (fog)\,(x) \Rightarrow \sqrt{e^{\alpha x}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\alpha x} > (e^{\alpha\sqrt{x}})^2 \Leftrightarrow e^{\alpha x} > e^{2\alpha\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha x > 2\,\alpha\,\sqrt{x} \Leftrightarrow x > 2\,\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 > 4x \Leftrightarrow x > 4$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

Determine as soluções reais da equação em x,

$$(\log_4 x)^3 - \log_4 (x^4) - 3\ \dfrac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0.$$

Resolução

I) $$\dfrac{\log_{10} 16\,x}{\log_{100} 16} = \dfrac{\dfrac{\log_4 16\,x}{\log_4 10}}{\dfrac{\log_4 16}{\log_4 10^2}} = \dfrac{\dfrac{\log_4 16\,x}{\log_4 10}}{\dfrac{2}{2\log_4 10}} =$$

$$= \log_4 16x = \log_4 16 + \log_4 x = 2 + \log_4 x$$

II) $$(\log_4 x)^3 - \log_4 (x^4) - 3\,.\,\dfrac{\log_{10} 16\,x}{\log_{100} 16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 3\,.\,(2 + \log_4 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 6 - 3\log_4 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x)^3 - 7\log_4 x - 6 = 0$$

Fazendo $\log_4 x = y$, resulta:

$$y^3 - 7y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \text{ ou } y = -2 \text{ ou } y = -1$$

Então, $\log_4 x = 3$ ou $\log_4 x = -2$ ou $\log_4 x = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 4^3 \text{ ou } x = 4^{-2} \text{ ou } x = 4^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 64 \text{ ou } x = \dfrac{1}{16} \text{ ou } x = \dfrac{1}{4}$$

Resposta: As soluções reais da equação são

$$64,\ \dfrac{1}{16}\ \text{e}\ \dfrac{1}{4}$$

a) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|z - 2| = 1, z \in \mathbb{C}$.

b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0;

Resolução

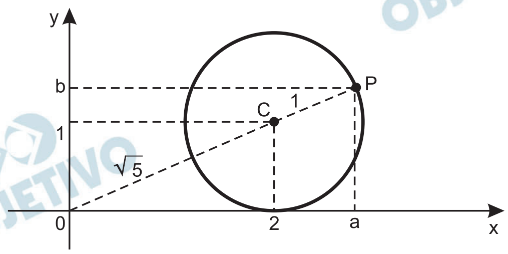
a) Os números $z = x + yi$, com x e $y \in \mathbb{R}$, que satisfazem $|z - 2| = 1$ são tais que $|x + yi - 2| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 2 + yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$

Concluímos, então, que os afixos desses números pertencem a uma circunferência de centro C (2; 0) e raio R = 1.

Os pontos que representam os números complexos z + i são os pertencentes à circunferência obtida acima deslocada de uma unidade "para cima", isto é, é a circunferência de centro (2; 1) e raio 1.



O valor máximo de $|z + i|$ é dado pela distância do ponto P até a origem, que é igual a $d = \sqrt{5} + 1$

b) Se P(a; b) é o afixo do número complexo w = a + bi, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $z_0 = a + (b - 1)i$, temos:

$$\frac{2}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \Leftrightarrow a = \frac{2(5+\sqrt{5})}{5} \quad \text{e}$$

$$\frac{b}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow b = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

Assim, $w = a + bi = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{5} + \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\, i$

e $z_0 = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{5} + \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{5} - 1\right) i =$

$= \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\, i$

Respostas: a) $\sqrt{5} + 1$

b) $z_0 = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\, i$

24

Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$; b) $n(A)$ e $n(B)$; c) $P(A)$ e $P(B)$.

Resolução

Admitindo que cada dado seja não viciado e tenha suas faces numeradas de 1 a 6, temos:

a) $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

b) Evento A (Soma 9):

Faces voltas para cima	Número de casos
1, 2 e 6	$3! = 6$
1, 3 e 5	$3! = 6$
1, 4 e 4	$\frac{3!}{2!} = 3$
2, 2 e 5	$\frac{3!}{2!} = 3$
2, 3 e 4	$3! = 6$
3, 3 e 3	1

Logo, $n(A) = 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$

Evento B (Soma 10):

Faces voltas para cima	Número de casos
1, 3 e 6	$3! = 6$
1, 4 e 5	$3! = 6$
2, 2 e 6	$\frac{3!}{2!} = 3$
2, 3 e 5	$3! = 6$
2, 4 e 4	$\frac{3!}{2!} = 3$
3, 3 e 4	$\frac{3!}{2!} = 3$

Logo, $n(B) = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$

c) $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{216}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Respostas: a) 216 b) 25 e 27

c) $\frac{25}{216}$ e $\frac{1}{8}$

25

Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Resolução

I) Seja A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

II) Cada 3 elementos de A, distintos ou não, determinam um só paralelepípedo.

III) O número de paralelepípedos retângulos diferentes que podem ser construídos é, pois,

$$C^*_{10,3} = C_{10+3-1,3} = C_{12,3} = \frac{12!}{3!9!} = 220$$

Resposta: 220

Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + \qquad\qquad y + 2z = 0 \\ -x + (\text{sen}\,\theta)\,y + 4z = 0, \theta \in [0, 2\pi]. \\ 2x + (1 - \cos 2\theta)\,y + 16z = 0 \end{cases}$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Resolução

a) I) $1 - \cos 2\theta = 1 - (1 - 2\,\text{sen}^2\theta) = 2\,\text{sen}^2\theta$

II) Para que o sistema linear homogêneo tenha infinitas soluções, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \text{sen}\,\theta & 4 \\ 2 & 1 - \cos 2\theta & 16 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \text{sen}\,\theta & 4 \\ 2 & 2\,\text{sen}^2\,\theta & 16 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -1$$

Assim, para $\theta \in [0; 2\pi]$, resulta $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

b) Para $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, temos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 16z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 6z = 0 \\ 12z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Fazendo $x = \alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$S = \{(\alpha, -\alpha, 0)\}, \alpha \in \mathbb{R}$

Respostas: a) $\dfrac{3\pi}{2}$ b) $S = \{(\alpha; -\alpha; 0)\}, \alpha \in \mathbb{R}$

27

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,x - 1}{\cos x - 1} < 0 \qquad \text{e}$$

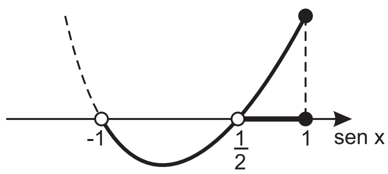
$$\text{tg}\,x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\,\text{cotg}\,x)\,\text{cotg}\,x$$

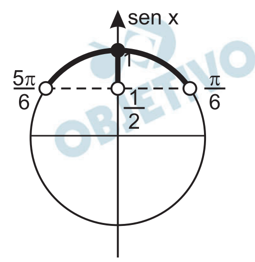
Resolução

Para $x \in [0; 2\pi]$, tem-se:

I) $\dfrac{2\,\text{sen}^2x + \text{sen}\,x - 1}{\cos x - 1} < 0$ **e** $\cos x - 1 < 0$, **pois** $\cos x \neq 1$, **então:** $2\,\text{sen}^2x + \text{sen}\,x - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \text{sen}\,x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$





II) $\text{tg}\,x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\,\text{cotg}\,x)\,\text{cotg}\,x \Leftrightarrow$

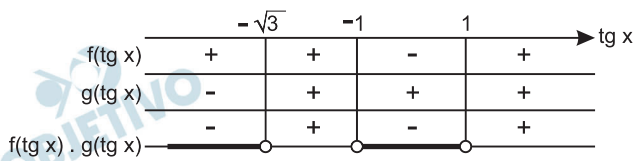
$$\Leftrightarrow \text{tg}\,x + \sqrt{3} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\text{tg}\,x}\right) \cdot \frac{1}{\text{tg}\,x} \Leftrightarrow$$

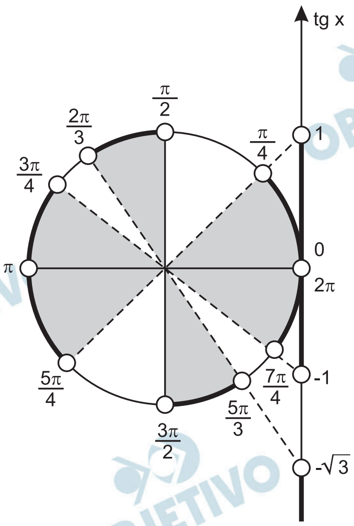
$$\Leftrightarrow \text{tg}\,x + \sqrt{3} < \frac{\text{tg}\,x + \sqrt{3}}{\text{tg}^2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2x\,(\text{tg}\,x + \sqrt{3}) < \text{tg}\,x + \sqrt{3}, \text{ pois } \text{tg}^2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}^2x - 1)\,(\text{tg}\,x + \sqrt{3}) < 0$$

Analisando os sinais das funções $f(\text{tg}\,x) = \text{tg}^2x - 1$ e $g(\text{tg}\,x) = \text{tg}\,x + \sqrt{3}$, tem-se:

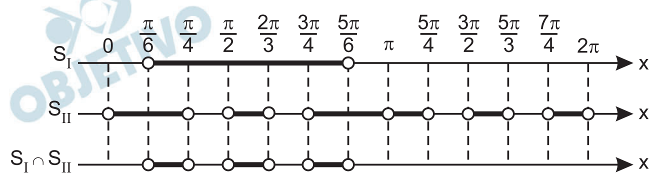




Assim, $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{3\pi}{4} < x < \pi$

ou $\pi < x < \dfrac{5\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{3}$ ou $\dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi$

III) Sendo S_I e S_{II} os conjuntos soluções das inequações (I) e (II), temos:

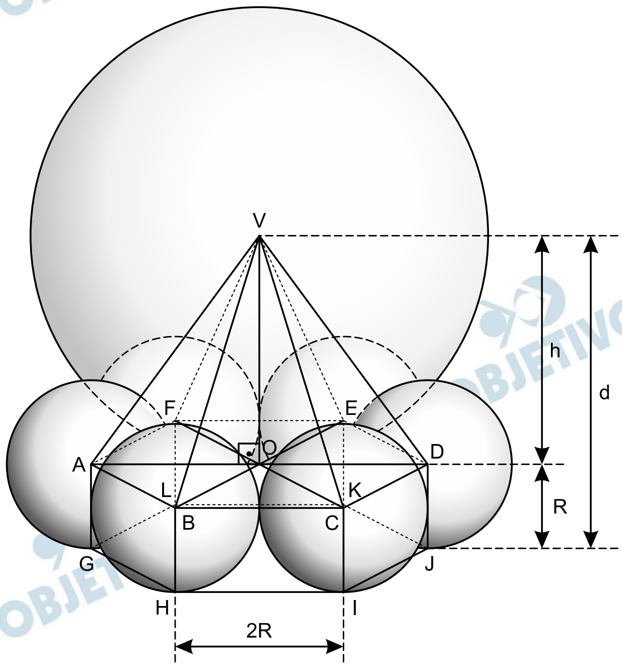


Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

28

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta 2R. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio 2R que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Resolução



Os centros das 6 esferas menores e os pontos em que elas tocam a superfície horizontal são vértices de um prisma hexagonal regular com as arestas das bases medindo 2R e a altura medindo R.

Os centros das 6 esferas menores e o centro da esfera maior são vértices de uma pirâmide hexagonal regular com as arestas das bases medindo 2R e as arestas laterais medindo 3R.

Assim, no triângulo retângulo VOA, temos:

$(VO)^2 + (AO)^2 = (VA)^2 \Rightarrow h^2 + (2R)^2 = (3R)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = R\sqrt{5}$

Logo, a distância d do centro da sétima esfera à superfície horizontal é

$d = h + R = R\sqrt{5} + R = R\left(\sqrt{5} + 1\right)$

Resposta: $R\left(\sqrt{5} + 1\right)$

29

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a 26π cm.

Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Resolução

Todas as dimensões lineares estão em cm; consequentemente, as dimensões superficiais estão cm^2 e as dimensões volumétricas, em cm^3.

a) Como r_1, r_2 e r_3 constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$, temos:

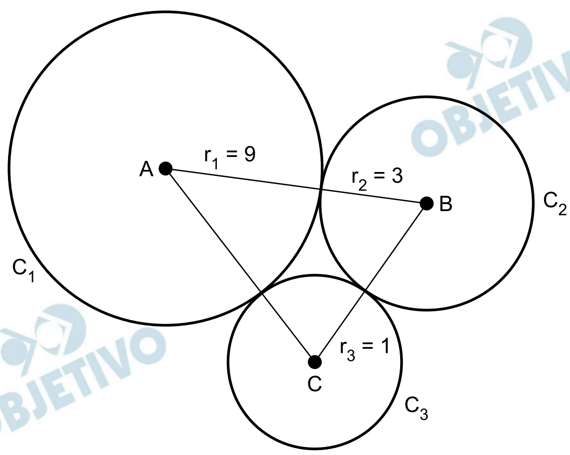
$$r_2 = \frac{r_1}{3} \text{ e } r_3 = \frac{r_1}{9}$$

Assim, de acordo com o enunciado, temos:

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 = 26\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot r_1 + 2\pi \cdot \frac{r_1}{3} + 2\pi \cdot \frac{r_1}{9} = 26\pi \Rightarrow r_1 = 9$$

Portanto, $r_2 = \frac{9}{3} = 3$ **e** $r_3 = \frac{9}{9} = 1$



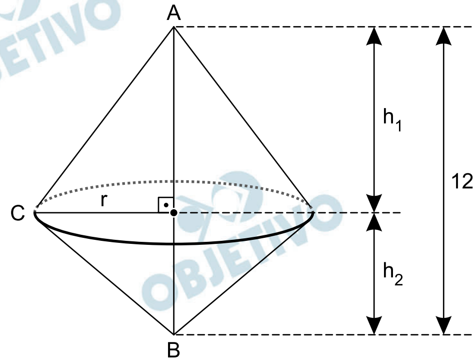
Os centros das circunferências C_1, C_2 e C_3 são, respectivamente, os vértices A, B e C de um triângulo ABC tal que AB = 9 + 3 = 12, AC = 9 + 1 = 10 e BC = 3 + 1 = 4.

Sendo p o semiperímetro e S a área do triângulo ABC, temos:

I) $p = \dfrac{12 + 10 + 4}{2} = 13$

II) $S = \sqrt{13 \,.\, (13 - 12) \,.\, (13 - 10) \,.\, (13 - 4)} = 3\sqrt{39}$

b)



Como a área do triângulo ABC é igual a $3\sqrt{39}$,

temos: $\dfrac{12 \,.\, r}{2} = 3\sqrt{39} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$

Assim, o volume V do sólido é dado pela soma dos volumes de dois cones, um com raio r e altura h_1 e o outro com raio r e altura h_2.

Logo, $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, h_1 + \dfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, h_2 =$

$= \dfrac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \dfrac{1}{3}\pi \,.\, \left(\dfrac{\sqrt{39}}{2}\right)^2 . 12 = 39\pi$

Respostas: a) $3\sqrt{39}$ cm²

b) 39π cm³

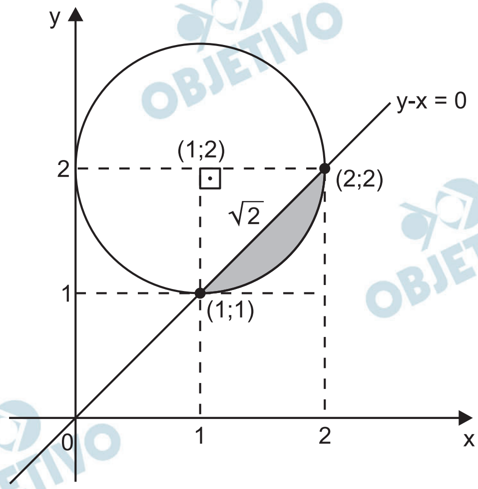
30

Um cilindro reto de altura h = 1 cm tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leqslant 0$.

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

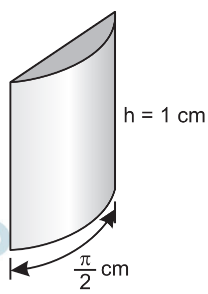
Resolução

$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1}$, **que é representada no plano xy por um círculo no ponto (1; 2) e raio r = 1.**



O plano, contendo a reta y – x = 0 e paralelo ao eixo do cilindro, secciona-o em dois sólidos. O de menor volume é um segmento cilíndrico cujas bases são congruentes ao segmento circular destacado na figura, que é limitado por um segmento de reta de comprimento $\sqrt{2}$ cm e um arco de comprimento

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \text{ cm.}$$



Como sua altura é h = 1 cm, então sua área total S, em centímetros quadrados, é igual a:

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\right) . 1 + 2 . \left(\frac{\frac{\pi}{2} . 1}{2} - \frac{1 . 1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} - 1 \Leftrightarrow S = \pi + \sqrt{2} - 1$$

Resposta: $(\pi + \sqrt{2} - 1)\ \text{cm}^2$