

FÍSICA

Se precisar, utilize os valores das constantes aqui relacionadas.

Constante dos gases: $R = 8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

Pressão atmosférica ao nível do mar: $P_0 = 100 \text{ kPa}$.

Massa molecular do $\text{CO}_2 = 44 \text{ u}$.

Calor latente do gelo: 80 cal/g .

Calor específico do gelo: $0,5 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})$.

$1 \text{ cal} = 4 \times 10^7 \text{ erg}$.

Aceleração da gravidade: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

1

Um fio de comprimento L e massa específica linear μ é mantido esticado por uma força F em suas extremidades. Assinale a opção com a expressão do tempo que um pulso demora para percorrê-lo.

- a) $\frac{2LF}{\mu}$ b) $\frac{F}{2\pi L\mu}$ c) $L \sqrt{\frac{\mu}{F}}$
d) $\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{F}}$ e) $\frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{F}}$

Resolução



Pela Fórmula de Taylor: $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (1)

O movimento do pulso é uniforme: $V = \frac{L}{T}$ (2)

Comparando-se (1) e (2):

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{L}{T} \Rightarrow T = L \sqrt{\frac{\mu}{F}}$$

Resposta: **C**

2

Uma pequena esfera metálica, de massa m e carga positiva q , é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial v_0 em uma região onde há um campo elétrico de módulo E , apontado para baixo, e um gravitacional de módulo g , ambos uniformes. A máxima altura que a esfera alcança é

- a) $\frac{v^2}{2g}$. b) $\frac{qe}{mv_0}$. c) $\frac{v_0}{qmE}$.
- d) $\frac{mv_0^2}{2(qE + mg)}$. e) $\sqrt{\frac{3mEqv_0}{8g}}$.

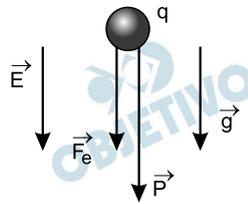
Resolução

$$F_{e\ell} = q \cdot E$$

$$P = m \cdot g$$

$$F_{res} = qE + mg$$

$$a_{res} = \frac{F_{res}}{m} \Rightarrow a_{res} = \frac{qE + mg}{m}$$



Usando Torricelli no lançamento:

$$V^2 = V_0^2 - 2 \cdot a_{res} \cdot \Delta y$$

Como no ponto mais alto da trajetória temos $V = 0$, então:

$$V_0^2 = 2 \cdot a_{res} \cdot H$$

$$H = \frac{V_0^2}{2 \cdot a_{res}}$$

$$H = \frac{V_0^2}{\frac{2(qE + mg)}{m}}$$

$$H = \frac{m \cdot V_0^2}{2(qE + mg)}$$

Resposta: **D**

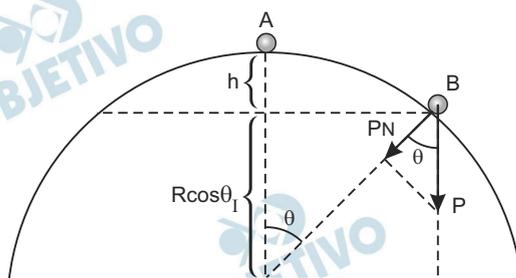
Uma massa puntiforme é abandonada com impulso inicial desprezível do topo de um hemisfério maciço em repouso sobre uma superfície horizontal. Ao descolar-se da superfície do hemisfério, a massa terá percorrido um ângulo θ em relação à vertical. Este experimento é realizado nas três condições seguintes, I, II e III, quando são medidos os respectivos ângulos θ_I , θ_{II} e θ_{III} :

- I. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal e não há atrito entre a massa e o hemisfério.
- II. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal, mas há atrito entre a massa e o hemisfério.
- III. O hemisfério e a massa podem deslizar livremente pelas respectivas superfícies.

Nestas condições, pode-se afirmar que

- a) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$
- b) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$
- c) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$
- d) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$
- e) $\theta_I = \theta_{III}$

Resolução



I) Hemisfério fixo e sem atrito.

$$1) h = R - R \cos \theta_I = R (1 - \cos \theta_I)$$

2) Conservação da energia mecânica:

$$E_A = E_B \quad (\text{ref. em B})$$

$$\frac{m V_B^2}{2} = m g R (1 - \cos \theta_I)$$

$$V_B^2 = 2 g R (1 - \cos \theta_I) \quad (1)$$

3) No ponto de desligamento, a força normal se anula e a componente normal do peso faz o papel de resultante centrípeta:

$$P_N = mg \cos \theta_I = \frac{m V_B^2}{R}$$

$$V_B^2 = g R \cos \theta_I \quad (2)$$

4) Comparando-se (1) e (2), vem:

$$2 g R (1 - \cos \theta_1) = g R \cos \theta_1$$

$$2 - 2 \cos \theta_1 = \cos \theta_1 \Rightarrow 2 = 3 \cos \theta_1$$

$$\cos \theta_1 = \frac{2}{3}$$

II) Hemisfério fixo com atrito. Com atrito, a aceleração será menor e, para conseguir atingir a velocidade de desligamento, a distância percorrida deverá ser maior e o ângulo θ também será maior:

$$\theta_{II} > \theta_I$$

III) Quando o hemisfério se desloca para a esquerda, a partícula sofre uma força de inércia (referencial no hemisfério) para a direita e sua aceleração relativa ao hemisfério será maior e, para atingir a velocidade de desligamento, a distância percorrida será menor e o ângulo θ também será menor:

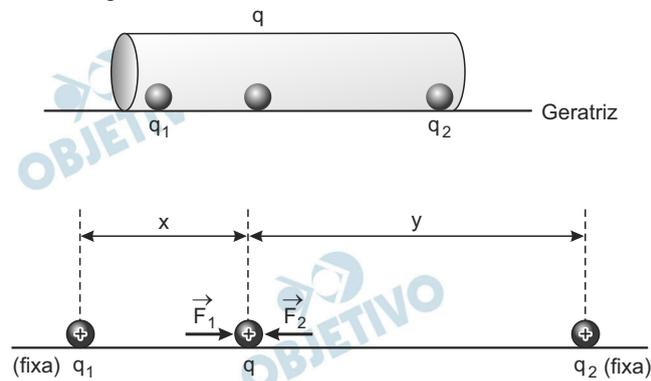
$$\theta_{III} < \theta_I$$

Resposta: C

Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento ℓ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas q_1 e q_2 , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

- I. Essa posição de equilíbrio é estável?
 - II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?
 - III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?
- a) Não. Sim. Não. b) Não. Sim. Sim.
 c) Sim. Não. Não. d) Sim. Não. Sim.
 e) Sim. Sim. Não.

Resolução



$$F_1 = k \frac{q \cdot q_1}{x^2} \quad F_2 = k \frac{q \cdot q_2}{y^2}$$

- I) No interior do tubo, podemos deslocar a partícula do meio apenas na direção da geratriz do cilindro.

Se a deslocarmos para a direita:

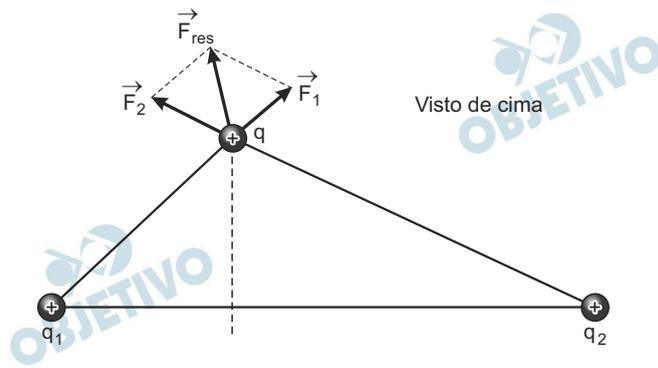
x (aumenta) $\rightarrow F_1$ (diminui)

y (diminui) $\rightarrow F_2$ (aumenta)

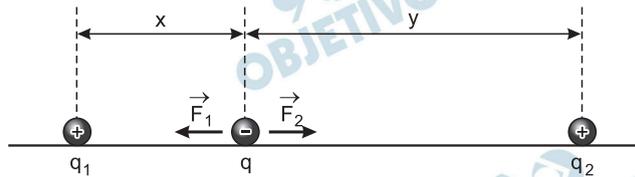
A força resultante terá sentido da direita para a esquerda e a partícula voltará para a posição inicial.

Logo, o equilíbrio é estável.

- II) Se não houvesse o tubo, a partícula do meio poderia ser deslocada numa direção qualquer e o seu equilíbrio não seria estável, como se mostra na figura a seguir.



III) Se a carga fosse negativa, teríamos:



Se deslocarmos a carga para a esquerda:

x (diminui) $\rightarrow F_1$ (aumenta)

y (aumenta) $\rightarrow F_2$ (diminui)

A força resultante será dirigida para a esquerda e a partícula não volta para a sua posição inicial.

Não é equilíbrio estável.

Em resumo:

I. Sim ; II. Não ; III. Não

Resposta: C

Considere as seguintes proposições sobre campos magnéticos:

- I. Em um ponto P no espaço, a intensidade do campo magnético produzido por uma carga puntiforme q que se movimenta com velocidade constante ao longo de uma reta só depende da distância entre P e a reta.
- II. Ao se aproximar um ímã de uma porção de limalha de ferro, esta se movimenta porque o campo magnético do ímã realiza trabalho sobre ela.
- III. Dois fios paralelos por onde passam correntes uniformes num mesmo sentido se atraem.

Então:

- a) apenas I é correta.
- b) apenas II é correta.
- c) apenas III é correta.
- d) todas são corretas.
- e) todas são erradas.

Resolução

I. Errada

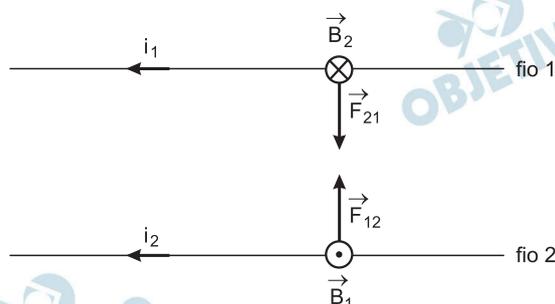
A intensidade do campo magnético em P depende do meio, da intensidade da corrente elétrica gerada pela carga em movimento e da distância entre P e a reta.

II. Errada

As partículas de ferro são deslocadas pela ação da força magnética que nelas vai atuar.

Deste modo, há realização de trabalho pela força magnética.

III. Correta



\vec{B}_1 : campo magnético gerado pela corrente i_1 sobre o fio 2.

\vec{F}_{12} : força magnética sobre o fio 2 devida à corrente que nele passa (i_2) e ao campo que nele atua (\vec{B}_1). Vale a regra da mão esquerda.

Do mesmo modo, obtemos \vec{F}_{21} no fio 1.

Observemos na figura que as forças são de atração.

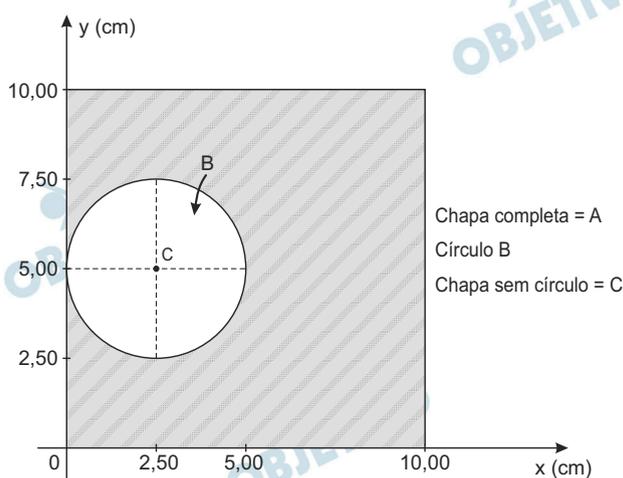
Resposta: C

Uma chapa metálica homogênea quadrada de 100 cm^2 de área, situada no plano xy de um sistema de referência, com um dos lados no eixo x , tem o vértice inferior esquerdo na origem. Dela, retira-se uma porção circular de $5,00 \text{ cm}$ de diâmetro com o centro posicionado em $x = 2,50 \text{ cm}$ e $y = 5,00 \text{ cm}$.

Determine as coordenadas do centro de massa da chapa restante.

- a) $(x_C, y_C) = (6,51, 5,00) \text{ cm}$
 b) $(x_C, y_C) = (5,61, 5,00) \text{ cm}$
 c) $(x_C, y_C) = (5,00, 5,61) \text{ cm}$
 d) $(x_C, y_C) = (5,00, 6,51) \text{ cm}$
 e) $(x_C, y_C) = (5,00, 5,00) \text{ cm}$

Resolução



$$1) \quad x_{CM(A)} = \frac{m_B x_B + m_C x_C}{m_B + m_C}$$

$$5,00 = \frac{k \cdot \pi (2,50)^2 \cdot 2,50 + k(100 - \pi(2,50)^2) \cdot x_C}{k \cdot 100}$$

$$500 = 49,1 + 80,4 \cdot x_C$$

$$x_C \approx 5,61 \text{ cm}$$

$$2) \quad y_{CM(A)} = \frac{m_B y_B + m_C y_C}{m_B + m_C}$$

$$y_C = y_{CM(A)} = 5,00 \text{ cm}$$

Resposta: **B**

No espaço sideral, luz incide perpendicular e uniformemente numa placa de gelo inicialmente a -10°C e em repouso, sendo 99% refletida e 1% absorvida. O gelo então derrete pelo aquecimento, permanecendo a água aderida à placa. Determine a velocidade desta após a fusão de 10% do gelo.

- a) 3 mm/s. b) 3 cm/s. c) 3 dm/s.
d) 3 m/s. e) 3 dam/s.

Resolução

(I) A quantidade de energia térmica fornecida à placa de gelo, necessária ao seu aquecimento e parcial fusão, é dada por:

$$Q = M c \Delta\theta + 0,1ML_F$$

$$Q = M (0,5 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10 + 0,1 \cdot 80 \cdot 4 \cdot 10^3) \text{ (SI)}$$

$$\text{Da qual: } Q = M \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 13 \text{ (SI)}$$

$$\text{ou: } \boxed{Q = M \cdot 52 \cdot 10^3} \text{ (SI)}$$

Esta é uma parte (1%) da energia total incidente.

II) Noventa e nove partes (99%) da energia total incidente é refletida.

$$E_{\text{refl}} = 99 Q \Rightarrow E_{\text{refl}} = 99 \cdot M \cdot 52 \cdot 10^3 \text{ (SI)}$$

$$\boxed{E_{\text{refl}} = M \cdot 5148 \cdot 10^3} \text{ (SI)}$$

III) Mas $E_{\text{refl}} = p c$

Em que p é a quantidade de movimento associada à luz refletida e c é a velocidade da luz no espaço sideral ($c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

$$\text{Logo: } p = \frac{E_{\text{refl}}}{c} = \frac{M \cdot 5148 \cdot 10^3}{3,0 \cdot 10^8} \text{ (SI)}$$

$$\text{Da qual: } \boxed{p = M \cdot 1,7 \cdot 10^{-2}} \text{ (SI)}$$

IV) O sistema é isolado de forças externas, valendo o princípio da conservação da quantidade de movimento.

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow -0,99p + MV = p$$

$$MV = 1,99p \Rightarrow V = \frac{1,99p}{M}$$

$$V = \frac{1,99 \cdot M \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \left(\frac{m}{s}\right)}{M}$$

$$V \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} \cong 3,4 \text{ cm/s}$$

Resposta: **B**

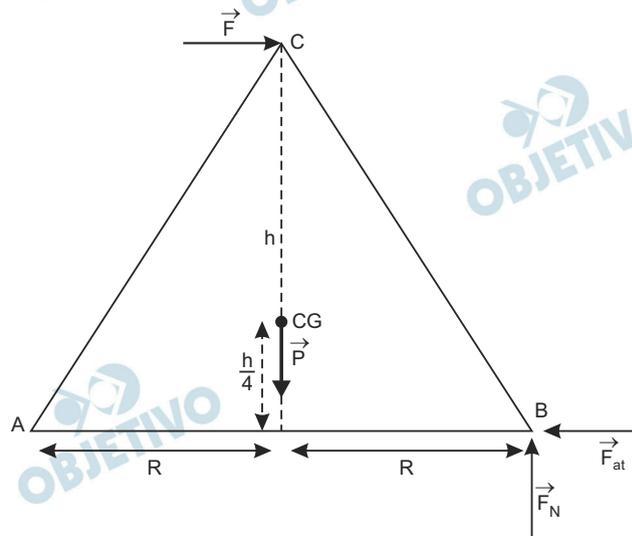
8

Um bloco cônico de massa M apoiado pela base numa superfície horizontal tem altura h e raio da base R . Havendo atrito suficiente na superfície da base de apoio, o cone pode ser tombado por uma força horizontal aplicada no vértice. O valor mínimo F dessa força pode ser obtido pela razão h/R dada pela opção

- a) $\frac{Mg}{F}$. b) $\frac{F}{Mg}$. c) $\frac{Mg + F}{Mg}$.
d) $\frac{Mg + F}{F}$. e) $\frac{Mg + F}{2Mg}$.

Resolução

Na iminência de tombar ($F = F_{\min}$), a força normal se concentra na extremidade do cone, conforme figura a seguir.



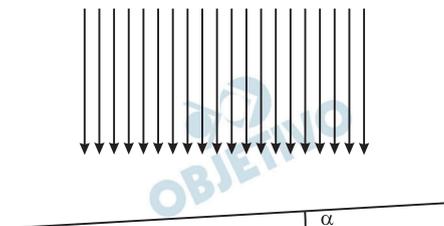
Impondo-se que a soma dos torques, em relação ao ponto B, seja nula, temos:

$$F \cdot h = P \cdot R$$

$$\frac{h}{R} = \frac{P}{F} = \frac{Mg}{F}$$

Resposta: **A**

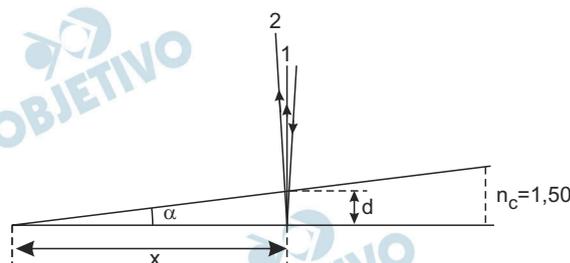
Luz, que pode ser decomposta em componentes de comprimento de onda com 480 nm e 600 nm, incide verticalmente em uma cunha de vidro com ângulo de abertura $\alpha = 3,00^\circ$ e índice de refração de 1,50, conforme a figura, formando linhas de interferência destrutivas.



Qual é a distância entre essas linhas?

- a) 11,5 μm b) 12,8 μm c) 16,0 μm
 d) 22,9 μm e) 32,0 μm

Resolução



1) Considerando a interferência entre os raios refletidos 1 e 2, temos:

- raio refletido 1: sofre reflexão com inversão de fase na interface ar/cunha.
- raio refletido 2: sofre reflexão sem inversão de fase na interface cunha/ar.

Para que ocorra interferência destrutiva, devemos ter:

$$\Delta x = p \frac{\lambda_c}{2} \quad (p = \text{número par})$$

$$2d = p \frac{\lambda_c}{2}$$

$$d = p \frac{\lambda_c}{4} \quad (\text{I})$$

Da figura, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{d}{x}$$

$$d = x \text{ tg } \alpha \quad (\text{II})$$

$$\text{Mas } \frac{\lambda_c}{\lambda_{ar}} = \frac{n_{ar}}{n_c} \Rightarrow \lambda_c = \frac{n_{ar} \lambda_{ar}}{n_c} \quad (\text{III})$$

De I, II e III, vem:

$$d = p \frac{\lambda_c}{4}$$

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{4} \frac{n_{ar} \lambda_{ar}}{n_c} \quad (\text{IV})$$

Sabemos ainda que: $\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha = 3,00^\circ$

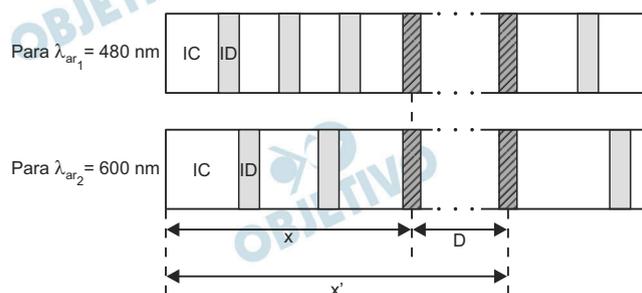
$$\operatorname{tg} \alpha \cong \frac{3,00 \pi}{180} \quad (\text{V})$$

De (IV) e (V), vem:

$$x = \frac{p}{4} \frac{n_{ar} \lambda_{ar}}{n_c} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$x = \frac{p}{4} \frac{n_{ar} \lambda_{ar}}{n_c} \frac{180}{3,00 \pi}$$

2) Observando, separadamente, as figuras de interferência, teríamos:



Sobrepondo tais figuras, podemos concluir que só será possível observarmos linhas de interferência destrutivas quando as interferências destrutivas (ID) das duas ondas coincidirem.

Assim, temos, para um mesmo valor da posição x ao longo da cunha:

$$x_1 = x_2$$

$$\frac{p_1}{4} \frac{n_{ar} \lambda_{ar_1}}{n_c} \frac{180}{3,00 \pi} = \frac{p_2}{4} \frac{n_{ar} \lambda_{ar_2}}{n_c} \frac{180}{3,00 \pi}$$

$$p_1 \lambda_{ar_1} = p_2 \lambda_{ar_2}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{600}{480} = \frac{10}{8}$$

Concluimos então que para $\lambda_{ar_1} = 480 \text{ nm}$, a sobreposição das linhas ocorre para valores de p_1 múltiplos de 10.

Dessa forma, temos:

$$D = x' - x$$

$$D = \frac{n_{ar} \lambda_{ar1}}{n_c} \frac{180}{3,00\pi} \left(\frac{p_1'}{4} - \frac{p_1}{4} \right)$$

$$D = \frac{1,0 \cdot 480 \cdot 10^{-9}}{1,50} \cdot \frac{180}{3,00\pi} \left(\frac{20}{4} - \frac{10}{4} \right) (\text{m})$$

$$D \cong 16 \cdot 10^{-6} \text{m}$$

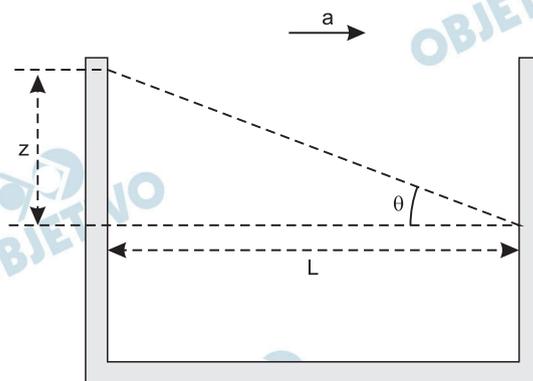
$D \cong 16\mu\text{m}$

Resposta: **C**

Um tubo em forma de U de seção transversal uniforme, parcialmente cheio até uma altura h com um determinado líquido, é posto num veículo que viaja com aceleração horizontal, o que resulta numa diferença de altura z do líquido entre os braços do tubo interdistantes de um comprimento L . Sendo desprezível o diâmetro do tubo em relação à L , a aceleração do veículo é dada por

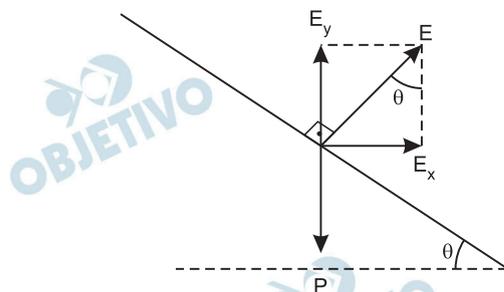
- a) $\frac{2zg}{L}$. b) $\frac{(h-z)g}{L}$. c) $\frac{(h+z)g}{L}$.
 d) $\frac{2gh}{L}$. e) $\frac{zg}{L}$.

Resolução



1) Da figura: $\boxed{\text{tg } \theta = \frac{z}{L}} \quad (1)$

2) Para uma partícula na superfície do líquido:



$$E_y = P = mg$$

$$E_x = ma$$

$$\text{tg } \theta = \frac{E_x}{E_y} = \frac{ma}{mg}$$

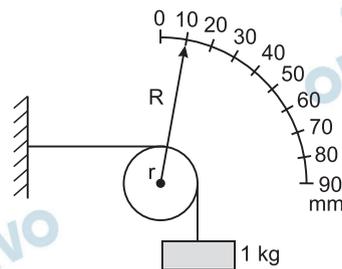
$$a = g \operatorname{tg} \theta \quad (2)$$

(1) em (2), vem:

$$a = \frac{g z}{L}$$

Resposta: E

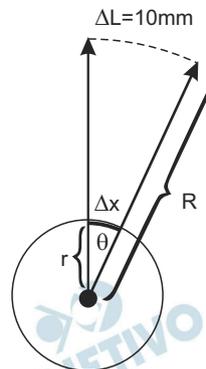
A figura mostra um dispositivo para medir o módulo de elasticidade (módulo de Young) de um fio metálico. Ele é definido como a razão entre a força por unidade de área da seção transversal do fio necessária para esticá-lo e o resultante alongamento deste por unidade de seu comprimento. Neste particular experimento, um fio homogêneo de 1,0 m de comprimento e 0,2 mm de diâmetro, fixado numa extremidade, é disposto horizontalmente e preso pela outra ponta ao topo de uma polia de raio r . Um outro fio preso neste mesmo ponto, envolvendo parte da polia, sustenta uma massa de 1 kg. Solidário ao eixo da polia, um ponteiro de raio $R = 10r$ acusa uma leitura de 10 mm na escala semicircular iniciada em zero.



Nestas condições, o módulo de elasticidade do fio é de

- a) $\frac{10^{12}}{\pi}$ N/m². b) $\frac{10^{12}}{2\pi}$ N/m².
 c) $\frac{10^{12}}{3\pi}$ N/m². d) $\frac{10^{12}}{4\pi}$ N/m².
 e) $\frac{10^{12}}{8\pi}$ N/m².

Resolução



1) Da figura, temos:

$$\theta = \frac{\Delta x}{r} = \frac{\Delta L}{R}$$

$$\Delta x = \frac{1}{10} \cdot 10 \text{ mm} \Rightarrow \Delta x = 1,0 \text{ mm}$$

$$2) E = \frac{F/A}{\frac{\Delta x}{L}}$$

$$F = m g = 10 \text{ N}$$

$$A = \pi R^2 = \pi (1,0 \cdot 10^{-4})^2 \text{ m}^2 = \pi \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$$

$$\Delta x = 1,0 \text{ mm}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

$$E = \frac{10/\pi \cdot 10^{-8}}{10^{-3}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$E = \frac{10^{12}}{\pi} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Nota: Não consideramos o comprimento do fio pendente na vertical.

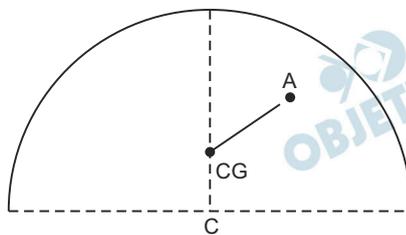
Resposta: **A**

Assinale a alternativa **incorreta** dentre as seguintes proposições a respeito de campos gravitacionais de corpos homogêneos de diferentes formatos geométricos:

- Num cubo, a linha de ação do campo gravitacional num dos vértices tem a direção da diagonal principal que parte desse vértice.
- Numa chapa quadrada de lado ℓ e vazada no centro por um orifício circular de raio $a < \ell/2$, em qualquer ponto dos seus eixos de simetria a linha de ação do campo gravitacional é normal ao plano da chapa.
- Num corpo hemisférico, há pontos em que as linhas de ação do campo gravitacional passam pelo centro da sua base circular e outros pontos em que isto não acontece.
- Num toro, há pontos em que o campo gravitacional é não nulo e normal à sua superfície.
- Num tetraedro regular, a linha de ação do campo gravitacional em qualquer vértice é normal à face oposta ao mesmo.

Resolução

- (V) A diagonal principal do cubo contém o seu centro de gravidade e, por isso, o campo gravitacional nos vértices terá direção da diagonal principal que passa por este vértice.
- (F) Existe um ponto no eixo de simetria em que o campo gravitacional é nulo.
- (V)

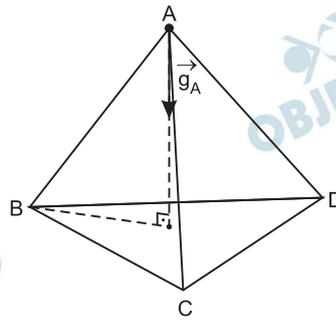


CG = centro de gravidade do hemisfério
C = centro da base circular

Para o ponto A, o campo gravitacional tem a direção da reta que une o ponto A ao ponto CG e não passa por C.

- (V) Para um plano de simetria horizontal (que contém o centro do toro), existem pontos em que o campo não é nulo e é radial e, portanto, normal à superfície do toro.

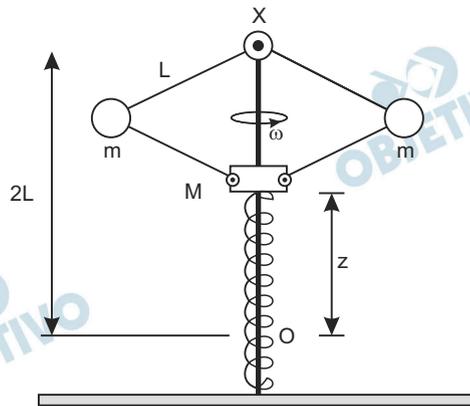
e) (V)



O campo gravitacional em A (\vec{g}_A) é normal à face BCD do tetraedro regular.

Resposta: **B**

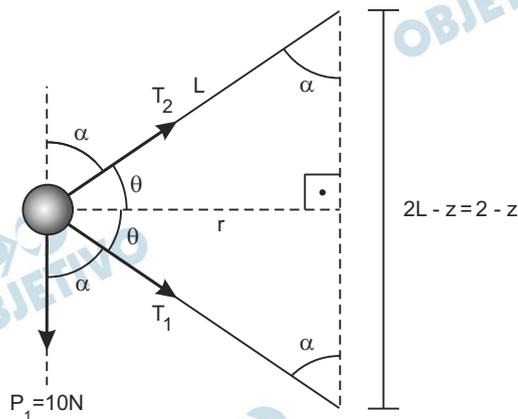
Na figura, o eixo vertical giratório imprime uma velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento $L = 1 \text{ m}$ e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa X. Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa M de 2 kg que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$, a partir da posição O da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de X. O sistema completa-se com duas massas iguais de $m = 1 \text{ kg}$ cada uma articuladas às barras.



Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura

- a) 0,2 m b) 0,5 m c) 0,6 m
d) 0,7 m e) 0,9 m

Resolução



$$\sin \theta = \frac{\frac{2-z}{2}}{L} = \frac{2-z}{2} = 1 - \frac{z}{2} \quad (z \text{ em m})$$

$$\cos \theta = \frac{r}{L}$$

1) Para a esfera m na direção vertical:

$$T_2 \text{ sen } \theta = P_1 + T_1 \text{ sen } \theta$$

$$(T_2 - T_1) \text{ sen } \theta = 10$$

$$(T_2 - T_1) \left(\frac{2-z}{2} \right) = 10 \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{20}{2-z} \quad (1)$$

2) Para a esfera m na direção horizontal:

$$T_1 \text{ cos } \theta + T_2 \text{ cos } \theta = m \omega^2 r$$

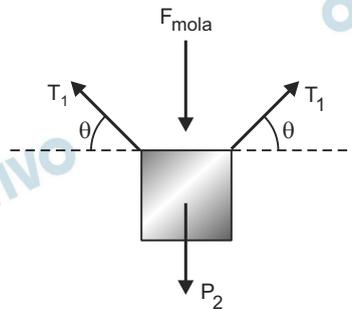
$$(T_1 + T_2) \text{ cos } \theta = m \omega^2 r = m \omega^2 L \text{ cos } \theta$$

$$T_1 + T_2 = 100 \quad (2)$$

3) (2) - (1): $2 T_1 = 100 - \frac{20}{2-z}$

$$T_1 = 50 - \frac{10}{2-z} \quad (3)$$

4) Para o bloco M:



$$2T_1 \text{ sen } \theta = P_2 + F_{\text{mola}}$$

$$2 \cdot \left(50 - \frac{10}{2-z} \right) \cdot \left(\frac{2-z}{2} \right) = 20 + 100 z$$

$$2 \cdot \left(\frac{100 - 50 z - 10}{2-z} \right) \cdot \left(\frac{2-z}{2} \right) = 20 + 100 z$$

$$90 - 50 z = 20 + 100 z$$

$$150 z = 70$$

$$z \cong 0,5 \text{ m}$$

Resposta: **B**

Considere as quatro proposições seguintes:

- I. Os isótopos ^{16}O e ^{18}O do oxigênio diferenciam-se por dois nêutrons.
- II. Sendo de 24000 anos a meia-vida do ^{239}Pu , sua massa de 600 g reduzir-se-à a 200 g após 72000 anos.
- III. Um núcleo de ^{27}Mg se transmuta em ^{28}Al pela emissão de uma partícula β .
- IV. Um fóton de luz vermelha incide sobre uma placa metálica causando a emissão de um elétron. Se esse fóton fosse de luz azul, provavelmente ocorreria a emissão de dois ou mais elétrons.

Então,

- a) apenas uma das proposições é correta.
- b) apenas duas das proposições são corretas.
- c) apenas três das proposições são corretas.
- d) todas elas são corretas.
- e) nenhuma delas é correta.

Resolução

I. Verdadeira.

Os isótopos ^{16}O e ^{18}O do oxigênio diferenciam-se por dois nêutrons, pois o elemento químico, que é caracterizado pelo número de prótons, não se altera.

II. Falsa.

O tempo de 72 000 anos corresponde a 3 meias-vidas de 24 000 anos ($n = 3$).

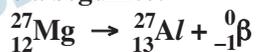
$$m = \frac{m_0}{2^n} = \frac{600 \text{ g}}{2^3} = \frac{600 \text{ g}}{8}$$

$m = 75 \text{ g}$

III. Falsa.

No decaimento β , a massa atômica não se altera, pois não há emissão de prótons ou nêutrons.

O decaimento β representa a emissão de um elétron pelo núcleo. A equação nuclear da emissão do magnésio com a transmutação para o alumínio é a seguinte:



IV. Falsa.

De acordo com a explicação de Einstein para o efeito fotoelétrico, o aumento da frequência da radiação vermelha para azul eleva a energia cinética do elétron emitido e não o número de elétrons.

Energia cinética
do elétron

= Energia
do fóton

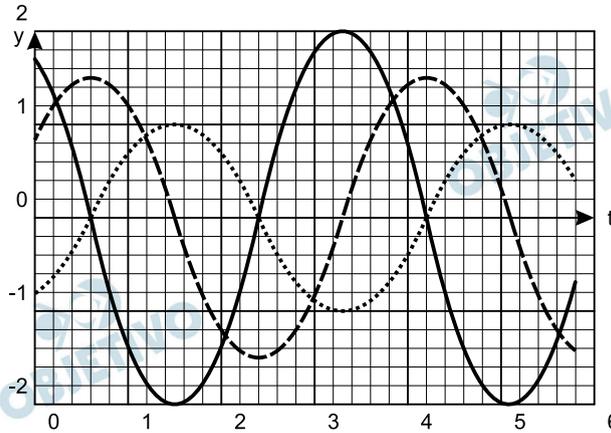
- Função
trabalho do
metal

$$E_c = hf - \tau$$

Resposta: **A**

15

Na figura, as linhas cheia, tracejada e pontilhada representam a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula em um movimento harmônico simples.



Com base nessas curvas assinale a opção correta dentre as seguintes proposições:

- I. As linhas cheia e tracejada representam, respectivamente, a posição e a aceleração da partícula.
 - II. As linhas cheia e pontilhada representam, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula.
 - III. A linha cheia necessariamente representa a velocidade da partícula.
- a) Apenas I é correta.
 - b) Apenas II é correta.
 - c) Apenas III é correta.
 - d) Todas são incorretas.
 - e) Não há informações suficientes para análise.

Resolução

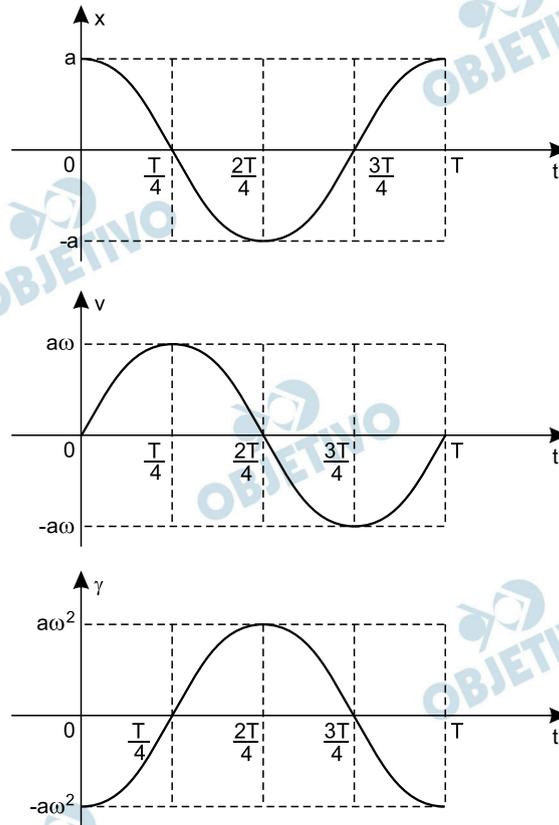
Consideremos, a título de verificação, um movimento harmônico simples (MHS) particular regido pelas funções horárias:

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ (Posição)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = -a \omega \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ (Velocidade escalar)}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \gamma = -a \omega^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ (Aceleração escalar)}$$

Os gráficos correspondentes estão esboçados a seguir.



Observando-se os gráficos, é possível notar que a velocidade escalar v está em “quadratura de fase” com a posição x e que a aceleração escalar γ está em “oposição de fase” com a posição x .

Na situação proposta, estaria de acordo com um MHS apenas a situação:

Linha cheia: posição

Linha tracejada: velocidade escalar

Linha pontilhada: aceleração escalar

Resposta: **D**

Numa expansão muito lenta, o trabalho efetuado por um gás num processo adiabático é

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{1 - \gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

em que P, V, T são, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura do gás, e γ uma constante, sendo os subscritos 1 e 2 representativos, respectivamente, do estado inicial e final do sistema. Lembrando que PV^γ é constante no processo adiabático, esta fórmula pode ser reescrita deste modo:

$$\text{a) } \frac{P_1 [V_1 - V_2 (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}]}{\ln(T_2/T_1) / \ln(V_1/V_2)}$$

$$\text{b) } \frac{P_2 [V_1 - V_2 (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}]}{\ln(T_2/T_1) / \ln(V_2/V_1)}$$

$$\text{c) } \frac{P_2 [V_1 - V_2 (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}]}{\ln(T_2/T_1) / \ln(V_1/V_2)}$$

$$\text{d) } \frac{P_1 [V_1 - V_2 (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}]}{\ln(T_2/T_1) / \ln(V_2/V_1)}$$

$$\text{e) } \frac{P_2 [V_1 - V_2 (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}]}{\ln(T_1/T_2) / \ln(V_2/V_1)}$$

Resolução

Como temos PV^γ constante, podemos assumir

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$PV^\gamma = PV^{\gamma+1-1} = PV^\gamma \cdot \frac{V}{V} = P \cdot V \cdot \frac{V^\gamma}{V}$$

Como $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, temos

$$(n R T_1) \cdot \frac{V_1^\gamma}{V_1} = (n R T_2) \frac{V_2^\gamma}{V_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}} \quad (1)$$

a) De (1), temos

$$T_1^{-1} V_1^{1-\gamma} = T_2^{-1} V_2^{1-\gamma} \Rightarrow T_2 V_1^{1-\gamma} = T_1 V_2^{1-\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln (T_2 V_1^{1-\gamma}) = \ln (T_1 V_2^{1-\gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln T_2 + (1 - \gamma) \ln V_1 = \ln T_1 + (1 - \gamma) \ln V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln T_2 - \ln T_1 = (1 - \gamma) (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = (1 - \gamma) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \gamma) = \frac{\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)}{\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = \frac{-\ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}{\ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)} \quad (\text{A})$$

b) De (1), temos

$$V_1^{\gamma-1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right) V_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_1 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_2^\gamma \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P_1 V_1^\gamma (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) &= P_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma} = \\ &= P_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1 \end{aligned}$$

Aplicando (B), temos

$$P_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1 =$$

$$= P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_2^\gamma \cdot V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1 =$$

$$= P_1 \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_2 - V_1 \right]$$

$$\text{Então } W_{12} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{1 - \gamma} \cdot (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) =$$

$$= \frac{P_1 \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_2 - V_1 \right]}{\frac{-\ln(T_2/T_1)}{\ln(V_1/V_2)}} =$$

$$= \frac{P_1 \left[V_1 - V_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]}{\ln(T_2/T_1) / \ln(V_1/V_2)}$$

Resposta: **A**

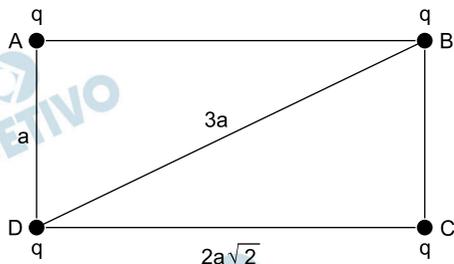
Assinale a alternativa que expressa o trabalho necessário para colocar cada uma de quatro cargas elétricas iguais, q , nos vértices de um retângulo de altura a e base $2a\sqrt{2}$, sendo $k = 1/4\pi\epsilon_0$, em que ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

a) $\frac{k(4 + \sqrt{2})q^2}{2a}$ b) $\frac{k(8 + 2\sqrt{2})q^2}{2a}$

c) $\frac{k(16 + 3\sqrt{2})q^2}{6a}$ d) $\frac{k(20 + 3\sqrt{2})q^2}{6a}$

e) $\frac{k(12 + 3\sqrt{2})q^2}{2a}$

Resolução



$$(DB)^2 = a^2 + (2a\sqrt{2})^2$$

$$(DB)^2 = 9a^2$$

$$DB = 3a$$

O trabalho necessário para colocar as quatro cargas elétricas nos vértices do retângulo é dado pela energia potencial eletrostática armazenada pelo sistema formado pelas quatro cargas:

$$\tau = E_{\text{pot}} = 2 \cdot \frac{k \cdot q \cdot q}{a} + 2 \cdot \frac{k \cdot qq}{3a} + 2 \cdot \frac{k \cdot qq}{2a\sqrt{2}}$$

$$\tau = E_{\text{pot}} = \frac{2kq^2}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\tau = E_{\text{pot}} = \frac{2k \cdot q^2}{a} \cdot \frac{(6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3)}{6\sqrt{2}}$$

$$\tau = E_{\text{pot}} = \frac{2k \cdot q^2}{a} \cdot \frac{8\sqrt{2} + 3}{6\sqrt{2}}$$

$$\tau = E_{\text{pot}} = \frac{2k \cdot q^2}{a} \cdot \frac{(8\sqrt{2} + 3)\sqrt{2}}{12}$$

$$\tau = E_{\text{pot}} = \frac{k(16 + 3\sqrt{2})q^2}{6a}$$

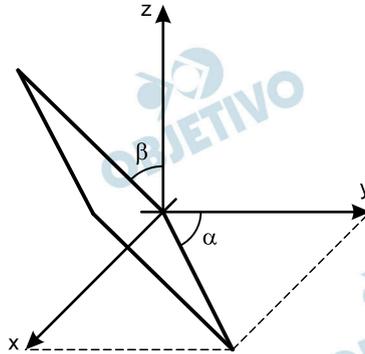
Resposta: **C**

18

Uma espira quadrada, feita de um material metálico homogêneo e rígido, tem resistência elétrica R e é solta em uma região onde atuam o campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ e um campo magnético

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{L} (-x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z).$$

Inicialmente a espira encontra-se suspensa, conforme a figura, com sua aresta inferior no plano xy num ângulo α com o eixo y , e o seu plano formando um ângulo β com z .



Ao ser solta, a espira tende a

- girar para $\alpha > 0^\circ$ se $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 0^\circ$.
- girar para $\alpha < 45^\circ$ se $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 0^\circ$.
- girar para $\beta < 90^\circ$ se $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 90^\circ$.
- girar para $\alpha > 0^\circ$ se $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 45^\circ$.
- não girar se $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 90^\circ$.

Resolução

Inicialmente, a espira abandonada cai, pela ação da gravidade, na direção do eixo z .

O campo magnético é dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{L} (-x \cdot \mathbf{e}_x + z \cdot \mathbf{e}_z)$$

Podemos interpretar que haja dois campos magnéticos componentes:

$$\vec{B}_x = \frac{B_0}{L} (-x \cdot \vec{e}_x) \text{ ou } B_x = -\frac{B_0}{L} \cdot x \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{B}_z = +\frac{B_0}{L} \cdot z \cdot \vec{e}_z$$

\vec{B}_x tem direção do eixo x e sentido oposto ao eixo.

\vec{B}_z tem direção e sentido do eixo z.

Devemos analisar caso a caso cada alternativa.

a) *Errada.*

Consideremos a figura 1, na qual a espira cai mantendo-se paralela ao plano yz.

Não ocorre variação de fluxo devido ao campo \vec{B}_z e nem tampouco ao \vec{B}_x .

Logo, não haverá corrente induzida na espira e não haverá tendência de rotação.

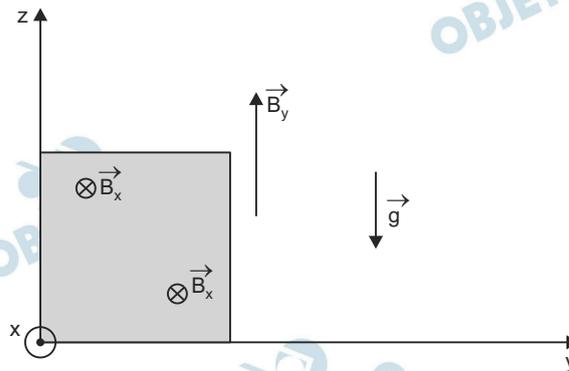


Figura 1: $\alpha = 0^\circ$; $\beta = 0^\circ$

b) *Errada.*

Consideremos a figura 2. A espira cai paralela às linhas de indução de \vec{B}_z e corta as linhas de \vec{B}_x , sem contudo haver variação de fluxo magnético.

Novamente, a espira não sofrerá torção.

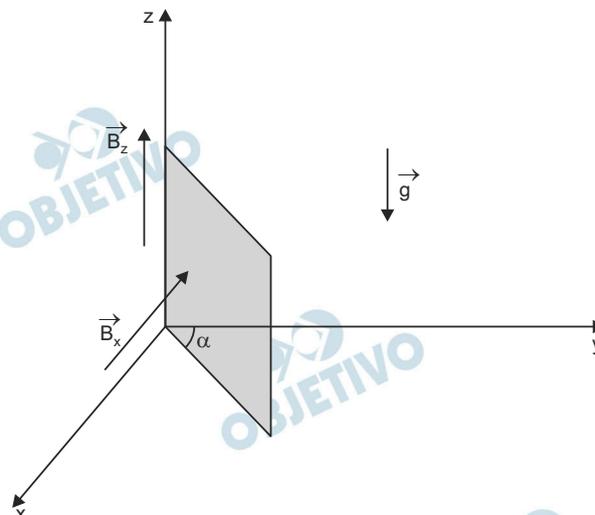


Figura 2: $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 0^\circ$

c) *Correta.*

Considere a fig. 3, para $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 90^\circ$.

A espira encontra-se paralela ao plano xy e cai em sentido contrário ao eixo z .

Como a intensidade de \vec{B}_z diminui à medida que a espira se aproxima de $z = 0$, o fluxo magnético também diminui.

Pela Lei de Lenz, haverá uma corrente induzida no sentido anti-horário para reforçar o fluxo de \vec{B}_z na espira.

Usando-se a regra da mão esquerda, determinamos as duas forças \vec{F}_x do campo \vec{B}_x sobre os lados da espira e as quatro forças \vec{F}_y do campo \vec{B}_y .

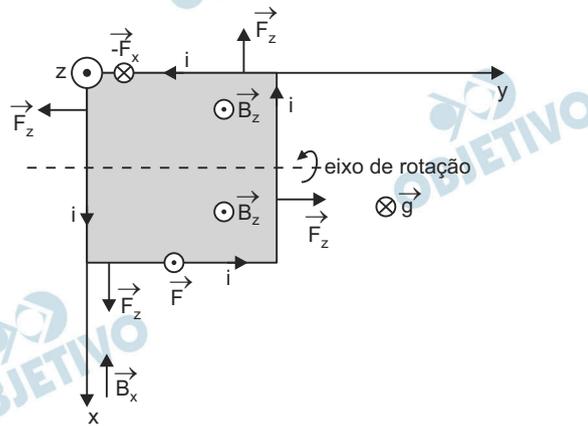


Figura 3: $\alpha = 0^\circ$; $\beta = 90^\circ$

Apenas \vec{F}_x e $-\vec{F}_x$ formam um binário e a espira gira em torno de um eixo paralelo a y , variando o ângulo β .

d) *Errada.*

Para $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, temos a situação mostrada na figura 4. Com a espira caindo num movimento vertical, haverá variação de fluxo devido ao campo \vec{B}_z .

Novamente, o fluxo diminui e temos uma corrente elétrica induzida no sentido anti-horário.

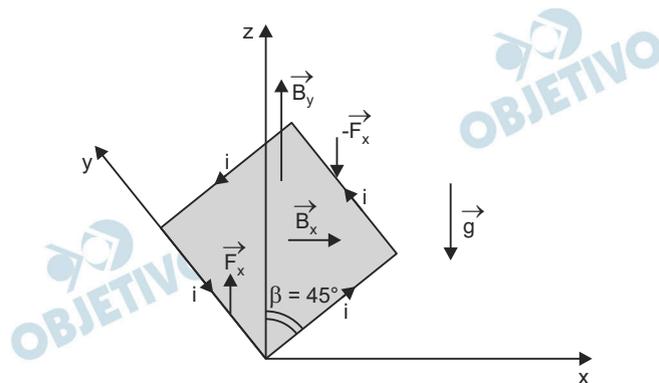


Figura 4: $\alpha = 0^\circ$; $\beta = 45^\circ$

Pela ação do campo \vec{B}_x , nos lados paralelos ao eixo y , verificamos que as forças \vec{F}_x e $-\vec{F}_x$ formam um binário e a espira gira em torno de um eixo paralelo a y . O ângulo β inicialmente diminui, mas α permanece igual a zero.

e) *Errada.*

Para $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 90^\circ$, a espira está paralela ao plano xy caindo em sentido oposto a z .

A corrente induzida novamente tem sentido anti-horário (reforço do fluxo decrescente) e o campo \vec{B}_z produzirá quatro forças de resultante nula. No entanto, o campo \vec{B}_x produzirá na espira as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 de resultante nula e com formação de um binário de rotação em torno do eixo diagonal, paralelo a y .

Resposta: C

Um muon de meia-vida de $1,5 \mu\text{s}$ é criado a uma altura de 1 km da superfície da Terra devido à colisão de um raio cósmico com um núcleo e se desloca diretamente para o chão. Qual deve ser a magnitude mínima da velocidade do muon para que ele tenha 50% de probabilidade de chegar ao chão?

- a) $6,7 \times 10^7$ m/s b) $1,2 \times 10^8$ m/s
 c) $1,8 \times 10^8$ m/s d) $2,0 \times 10^8$ m/s
 e) $2,7 \times 10^8$ m/s

Resolução

Seja u o módulo da velocidade do muon. Para um observador fixo no referencial da Terra, o muon deve percorrer a distância $d = 1\text{km}$ (1000m) num intervalo de tempo Δt (“tempo dilatado”). Assim, temos:

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{1000}{u} \text{ (s)}$$

Pela Teoria da Relatividade Restrita, a dilatação do tempo é dada por:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1000}{u} = \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{(3,0 \cdot 10^8)^2}}}$$

$$\frac{10^3}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{9,0 \cdot 10^{16}}} = 1,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{9,0 \cdot 10^{16}}} = \frac{1,5 \cdot 10^{-6} u}{10^3}$$

$$1 - \frac{u^2}{9,0 \cdot 10^{16}} = 2,25 \cdot 10^{-18} u^2$$

$$1 = 2,25 \cdot 10^{-18} u^2 + \frac{u^2}{9,0 \cdot 10^{16}}$$

$$1 = \frac{20,25 \cdot 10^{-2} u^2 + u^2}{9,0 \cdot 10^{16}}$$

$$1,2025 u^2 = 9,0 \cdot 10^{16}$$

$$u = \sqrt{\frac{9,0 \cdot 10^{16}}{1,2025}} \text{ (m/s)}$$

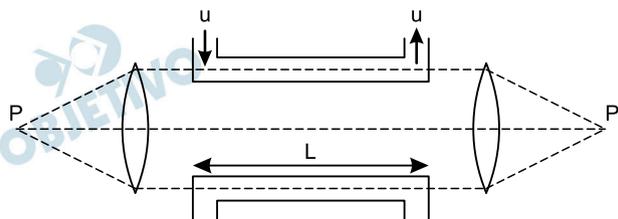
$$u \cong 2,736 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Utilizando apenas dois algarismos significativos, temos:

$$u \cong 2,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Resposta: E

Luz de uma fonte de frequência f gerada no ponto P é conduzida através do sistema mostrado na figura.



Se o tubo superior transporta um líquido com índice de refração n , movendo-se com velocidade u , e o tubo inferior contém o mesmo líquido em repouso, qual o valor mínimo de u para causar uma interferência destrutiva no ponto P' ?

- a) $\frac{c^2}{2nLf}$ b) $\frac{c^2}{2Lfn^2 - cn}$
- c) $\frac{c^2}{2Lfn^2 + cn}$ d) $\frac{c^2}{2Lf(n^2 - 1) - cn}$
- e) $\frac{c^2}{2Lf(n^2 - 1) + cn}$

Resolução

O fator que acarreta defasagem entre os pulsos de luz que atingem o ponto P' é o atraso do pulso que atravessa o líquido em repouso em relação ao pulso que segue através do líquido em escoamento. Sendo Δt_a o citado atraso, tem-se:

$$\Delta t_a = \Delta t_1 - \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_a = \frac{L}{V_1} - \frac{L}{V_2}$$

V_1 = velocidade da luz através do líquido em repouso

$$\left(V_1 = \frac{c}{n} \right)$$

V_2 = velocidade da luz através do líquido em escoamento.

Pela expressão de transformação relativística de Lorentz, tem-se:

$$V_2 = \frac{V_1 + u}{1 + \frac{V_1 u}{c^2}}$$

$$\text{Logo: } \Delta t_a = \frac{L}{V_1} - \frac{L}{\frac{V_1 + u}{1 + \frac{V_1 u}{c^2}}}$$

$$\Delta t_a = \frac{L}{V_1} - \frac{L}{\frac{c^2(V_1 + u)}{c^2 + V_1 u}} \Rightarrow \Delta t_a = \frac{L}{V_1} - \frac{L(c^2 + V_1 u)}{c^2(V_1 + u)}$$

$$\Delta t_a = \frac{L [c^2(V_1 + u) - V_1(c^2 + V_1 u)]}{V_1 c^2(V_1 + u)}$$

$$\Delta t_a = \frac{L(c^2 V_1 + c^2 u - c^2 V_1 - V_1^2 u)}{V_1 c^2(V_1 + u)}$$

$$\Delta t_a = \frac{L u (c^2 - V_1^2)}{V_1 c^2(V_1 + u)} \Rightarrow \Delta t_a = \frac{L u (c^2 - V_1^2)}{c^2(V_1^2 + V_1 u)}$$

Cálculo da defasagem angular $\Delta\phi$ dos pulsos de luz no ponto P' devido ao atraso Δt_a :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t_a \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi f \left[\frac{L u (c^2 - V_1^2)}{c^2(V_1^2 + V_1 u)} \right]$$

Para que ocorra em P' *interferência destrutiva*, o valor mínimo de $\Delta\phi$ é π rad.

Logo:

$$\pi = 2\pi f \left[\frac{L u (c^2 - V_1^2)}{c^2(V_1^2 + V_1 u)} \right]$$

$$c^2(V_1^2 + V_1 u) = 2Luf \cdot (c^2 - V_1^2)$$

Lembrando-se que $V_1 = \frac{c}{n}$, vem

$$c^2 \left(\frac{c^2}{n^2} + \frac{c}{n} u \right) = 2Luf \left(c^2 - \frac{c^2}{n^2} \right)$$

$$\frac{c^2}{n^2} + \frac{cu}{n} = 2Luf \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{c^2 + cun}{n^2} = 2Luf \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$$

$$c^2 = u [2Lf(n^2 - 1) - cn]$$

Da qual:

$$\Delta t_a = \frac{c^2}{2Lf(n^2 - 1) - cn}$$

Nota: do ponto de vista fenomenológico, causa-nos estranheza o fato de um líquido em escoamento “arrastar” consigo a luz, tornando-a mais veloz que a luz propagando-se no mesmo líquido em repouso, contrariando a equação de Maxwell.

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$

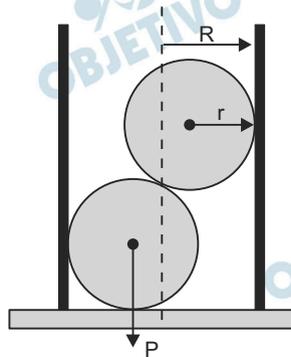
A velocidade da luz não depende da velocidade de arrastamento do meio.

Resposta: **D**

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser desenvolvidas, justificadas e respondidas no caderno de soluções.

21

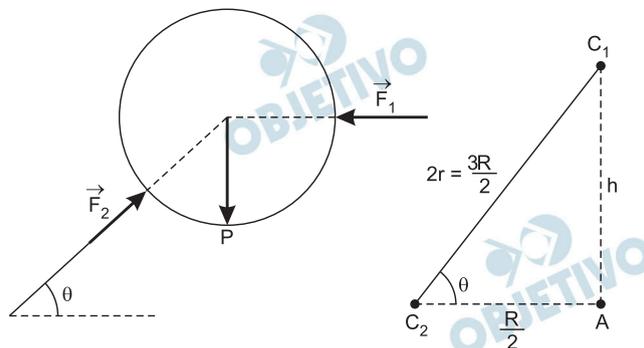
A figura mostra um tubo cilíndrico de raio R apoiado numa superfície horizontal, em cujo interior encontram-se em repouso duas bolas idênticas, de raio $r = 3R/4$ e peso P cada uma.



Determine o peso mínimo P_c do cilindro para que o sistema permaneça em equilíbrio.

Resolução

1) Para cada esfera, temos:

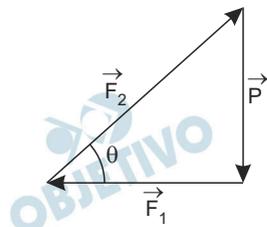


Da figura:

$$h^2 = \frac{9R^2}{4} - \frac{R^2}{4} = \frac{8R^2}{4} = 2R^2 \Rightarrow \boxed{h = R\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{\frac{R}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\frac{R}{2}} = 2\sqrt{2}$$

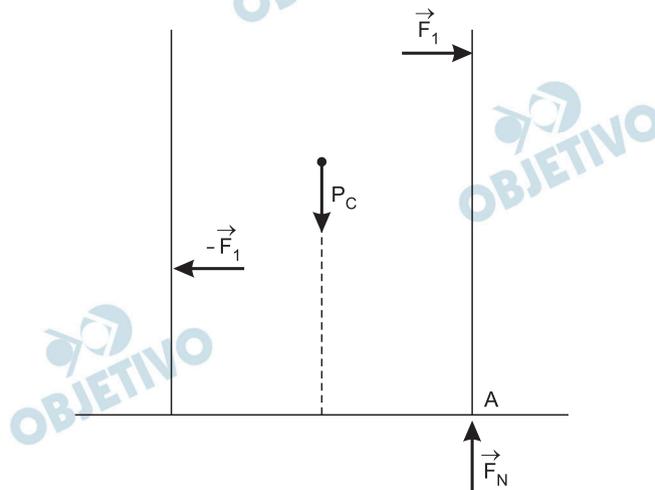
2) Cálculo de \vec{F}_1 :



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{F_1} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \frac{P}{F_1}$$

$$F_1 = \frac{P}{2\sqrt{2}} = \frac{P\sqrt{2}}{4}$$

3) Supondo-se que o cilindro não tenha base de apoio, teremos:



Na iminência de tombar, a força normal aplicada pelo chão fica concentrada na posição A. Impondo que o torque resultante, em relação ao ponto A, seja nulo, teremos:

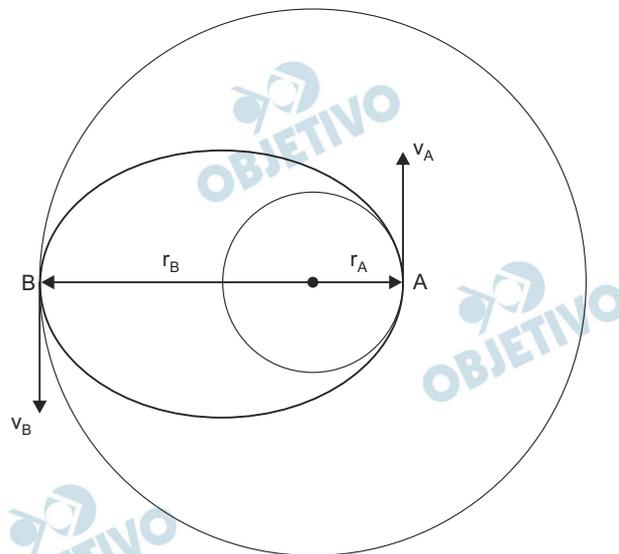
$$F_1 \cdot h = P_c \cdot R$$

$$\frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot R\sqrt{2} = P_c \cdot R$$

$$P_c = \frac{P}{2}$$

Resposta: $P_{\min} = \frac{P}{2}$

Uma nave espacial segue inicialmente uma trajetória circular de raio r_A em torno da Terra. Para que a nave percorra uma nova órbita também circular, de raio $r_B > r_A$, é necessário por razões de economia fazer com que ela percorra antes uma trajetória semi-elíptica, denominada órbita de transferência de Hohmann, mostrada na figura.



Para tanto, são fornecidos à nave dois impulsos, a saber: no ponto A, ao iniciar sua órbita de transferência, e no ponto B, ao iniciar sua outra órbita circular.

Sendo M a massa da Terra; G , a constante da gravitação universal; m e v , respectivamente, a massa e a velocidade da nave; e constante a grandeza mrv na órbita elíptica, pede-se a energia necessária para a transferência de órbita da nave no ponto B.

Resolução

Para a órbita elíptica com semi-eixos r_A e r_B , a energia mecânica total da nave espacial é dada por:

$$E_1 = -\frac{GMm}{r_A + r_B}, \text{ conforme se demonstra a seguir:}$$

$$\text{No periélio: } E_1 = -\frac{GMm}{r_A} + \frac{m V_{\text{máx}}^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{No afélio: } E_1 = -\frac{GMm}{r_B} + \frac{m V_{\text{mín}}^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Em (1): } V_{\text{máx}}^2 = \left(E_1 + \frac{GMm}{r_A} \right) \frac{2}{m}$$

$$\text{Em (2): } V_{\text{mín}}^2 = \left(E_1 + \frac{GMm}{r_B} \right) \frac{2}{m}$$

Sabe-se que: $V_{\text{máx}} \cdot r_A = V_{\text{mín}} \cdot r_B$

$$r_A = V_{\text{mín}} r_B$$

$$V_{\text{máx}}^2 r_A^2 = V_{\text{mín}}^2 r_B^2$$

$$\left(E_1 + \frac{GMm}{r_A}\right) \frac{2}{m} \cdot r_A^2 = \left(E_1 + \frac{GMm}{r_B}\right) \frac{2}{m} \cdot r_B^2$$

$$E_1 \cdot r_A^2 + GMm r_A = E_1 r_B^2 + GMm r_B$$

$$E_1 (r_A^2 - r_B^2) = GMm (r_B - r_A)$$

$$E_1 (r_A - r_B) (r_A + r_B) = GMm (r_B - r_A)$$

$$E_1 = - \frac{GMm}{r_B + r_A}$$

Para a órbita circular de raio r_B , temos:

$$E_2 = - \frac{GMm}{2r_B}$$

A energia necessária para a transferência de órbita em B é dada por:

$$E = E_2 - E_1 = - \frac{GMm}{2r_B} + \frac{GMm}{r_A + r_B}$$

$$E = GMm \left(\frac{1}{r_A + r_B} - \frac{1}{2r_B} \right)$$

$$E = GMm \frac{(2r_B - r_A - r_B)}{(r_A + r_B)(2r_B)}$$

$$E = \frac{GMm (r_B - r_A)}{(r_A + r_B)2r_B}$$

Num copo de guaraná, observa-se a formação de bolhas de CO_2 que sobem à superfície. Desenvolva um modelo físico simples para descrever este movimento e, com base em grandezas intervenientes, estime numericamente o valor da aceleração inicial de uma bolha formada no fundo do copo.

Resolução

A bolha de CO_2 fica sujeita à ação de uma força gravitacional aplicada pela Terra (peso) e uma força de empuxo aplicada pela água.

A força de empuxo vai ser maior que o peso e a bolha vai ser acelerada até a superfície do líquido.

Supondo-se condições normais de pressão e temperatura, o volume de uma massa de 1 mol de CO_2 ocupa $22,4\ell$ e a densidade da bolha vale:

$$\mu_B = \frac{m}{\text{Vol}} = \frac{44 \text{ g}}{22,4\ell} = 1,96 \text{ g}/\ell = \frac{1,96 \cdot \text{g}}{1000 \text{ cm}^3}$$

$$\mu_B = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

A aceleração inicial da bolha é dada por:

$$\text{PFD: } E - P = m a$$

$$\mu_A V g - \mu_B V g = \mu_B V a$$

$$a = g \frac{(\mu_A - \mu_B)}{\mu_B} = \frac{10 \cdot (1,0 - 1,96 \cdot 10^{-3})}{1,96 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$$

Uma carga q ocupa o centro de um hexágono regular de lado d tendo em cada vértice uma carga idêntica q . Estando todas as sete cargas interligadas por fios inextensíveis, determine as tensões em cada um deles.

Resolução

I. Na carga (1), vamos desenhar apenas as seis forças elétricas que nela atuam:

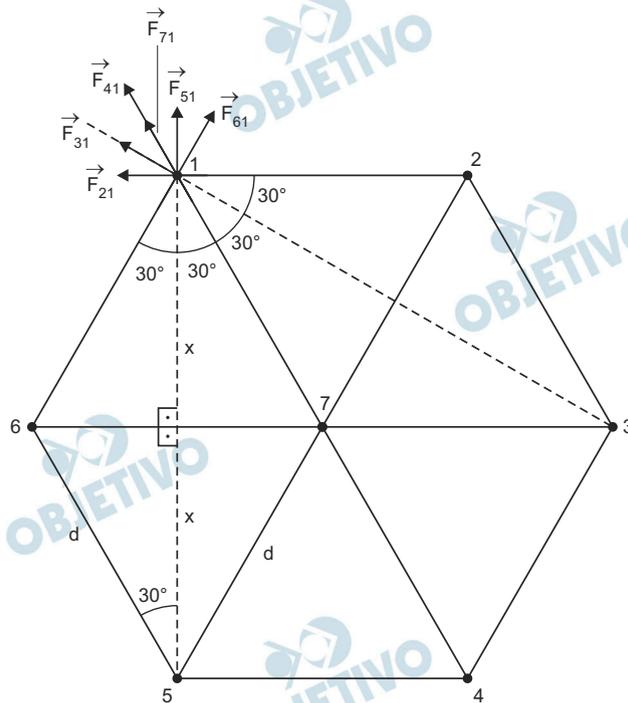


Fig 1: apenas as forças elétricas em (1).

$$F_{71} = F_{21} = F_{61} = k \frac{q^2}{d^2}$$

$$x^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{3d^2}{4} \quad x = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{51} = F_{31} = \frac{kq^2}{(2x)^2} = \frac{kq^2}{4x^2} = \frac{kq^2}{3d^2}$$

$$F_{41} = \frac{kq^2}{(2d)^2} = \frac{kq^2}{4d^2} \quad (1)$$

Fazendo $F_{41} = F$, teremos:

$$F_{71} = F_{21} = F_{61} = 4F$$

$$F_{51} = F_{31} = \frac{4F}{3}$$

Determinação da força elétrica resultante na carga (1):

$$F_{\text{res}_{el}} = F_{71} + F_{41} + F_{51} \cdot \cos 30^\circ + F_{31} \cdot \cos 30^\circ +$$

$$+ F_{61} \cdot \cos 60^\circ + F_{21} \cdot \cos 60^\circ$$

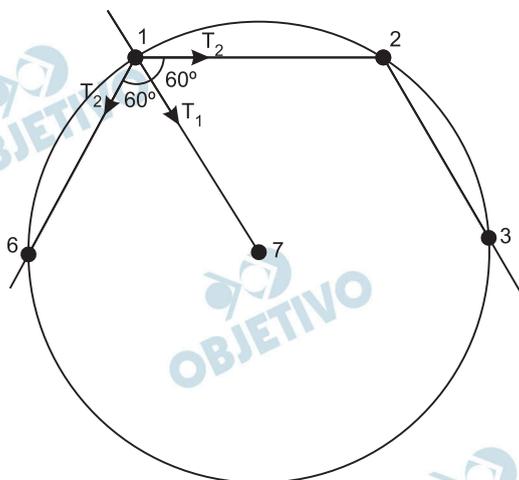
$$F_{\text{res}_{el}} = 4F + F + \frac{4F}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4F}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ 4F \cdot \frac{1}{2} + 4F \cdot \frac{1}{2}$$

$$(2) F_{\text{res}_{el}} = 9F + \frac{4F\sqrt{3}}{3} \Rightarrow F_{\text{res}_{el}} = \frac{(27 + 4\sqrt{3})F}{3}$$

Essa é a resultante das forças elétricas em cada carga do hexágono, sendo que F é dada pela equação 1.

II. Na carga (1), vamos desenhar as três forças de tração dos fios.



A força de tração resultante é dada por:

$$T_{\text{res}} = T_1 + 2 T_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$T_{\text{res}} = T_1 + T_2 \quad (3)$$

III. Equilíbrio da partícula 1:

$$F_{\text{res}} = 0$$

$$T_1 + T_2 = F_{\text{res}_{el}}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{(27 + 4\sqrt{3})F}{3}$$

Usando o valor de F dado na equação 1

$$T_1 + T_2 = \frac{kq^2}{d^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right) \quad (4)$$

O enunciado não fornece dados suficientes para se determinar uma relação entre T_1 e T_2 e o problema ficou indeterminado.

Vamos propor algumas alternativas.

1ª solução:

Supondo-se que as trações T_1 e T_2 sejam iguais:

$$T_1 = T_2 = T$$

$$T = \frac{kq^2}{d^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{24} \right)$$

2ª solução:

Admitindo-se que as trações dos fios que contornam o hexágono sejam nulas ($T_2 = 0$), as trações radiais terão máxima intensidade.

Da equação (4):

$$T_1 = \frac{kq^2}{d^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right)$$

3ª solução:

Admitindo-se que as trações radiais sejam nulas, sobram as trações dos fios que contornam o hexágono, que terão máxima intensidade.

$$T_2 = \frac{kq^2}{d^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right)$$

Neutrons podem atravessar uma fina camada de chumbo, mas têm sua energia cinética absorvida com alta eficiência na água ou em materiais com elevada concentração de hidrogênio. Explique este efeito considerando um nêutron de massa m e velocidade V_0 que efetua uma colisão elástica e central com um átomo qualquer de massa M inicialmente em repouso.

Resolução



- 1) Conservação da quantidade de movimento no ato da colisão:

$$Q_f = Q_i$$

$$mV_N + M V_A = m V_0$$

$$V_N + \frac{M}{m} V_A = V_0 \quad (1)$$

- 2) Colisão elástica:

$$V_A - V_N = V_0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): V_A \left(1 + \frac{M}{m} \right) = 2V_0$$

$$V_A = \frac{2m V_0}{M + m}$$

$$\text{Em (2): } \frac{2m V_0}{M + m} - V_N = V_0$$

$$V_N = \frac{2m V_0}{M + m} - V_0 = V_0 \left(\frac{2m}{M + m} - 1 \right)$$

$$V_N = V_0 \frac{(m - M)}{M + m}$$

A energia cinética perdida pelo nêutron é dada por:

$$E_0 = \frac{m V_0^2}{2}$$

$$E_f = \frac{m}{2} V_0^2 \left(\frac{m - M}{M + m} \right)^2$$

$$E_{\text{perdida}} = E_0 - E_f = \frac{m V_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{m - M}{M + m} \right)^2 \right]$$

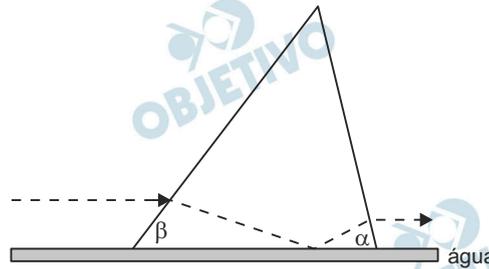
$$E_{\text{perdida}} = \frac{m V_0^2}{2} \left[\frac{(M + m)^2 - (m - M)^2}{(M + m)^2} \right]$$

$$E_{\text{perdida}} = \frac{m V_0^2}{2} \frac{M^2 + 2Mm + m^2 - m^2 + 2Mm - M^2}{(M + m)^2}$$

$$E_{\text{perdida}} = \frac{m V_0^2}{2} \frac{4 Mm}{(M + m)^2}$$

$$E_{\text{perdida}} = \frac{2M m^2 V_0^2}{(M + m)^2}$$

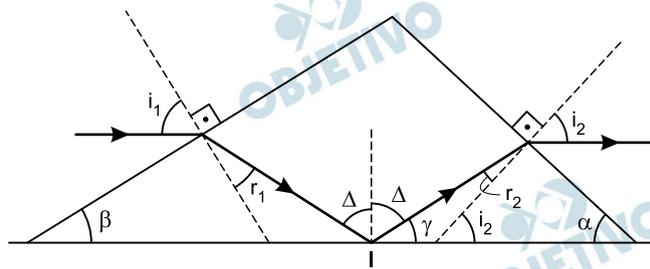
A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos, α e β . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo β , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água.



Determine o ângulo α tal que o raio emergja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é $4/3$ e, o do vidro, $\sqrt{19}/3$.

Resolução

Para determinarmos o ângulo α vamos supor, embora não esteja explicitado no texto, que a reflexão total ocorrida na interface vidro-água ocorra com ângulo muito próximo do ângulo limite de incidência.



- 1) Reflexão total em I com ângulo de incidência próximo do limite:

$$\text{sen } \Delta = \frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{vidro}}} = \frac{4}{\sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{19}}$$

$$\text{cos } \Delta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \Delta} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

- 2) Refração na interface vidro-ar:

$$n_{\text{ar}} \cdot \text{sen } i_2 = n_{\text{vidro}} \cdot \text{sen } r_2$$

$$\text{sen } i_2 = \frac{\sqrt{19}}{3} \text{sen } r_2$$

- 3) Da figura $i_2 = r_2 + \gamma$

$$r_2 = i_2 - \gamma$$

$$\text{sen } r_2 = \text{sen } i_2 \cos \gamma - \text{sen } \gamma \cos i_2 \quad (1)$$

$$\text{Porém: } \text{sen } \gamma = \cos \Delta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \quad (2)$$

$$\cos \gamma = \text{sen } \Delta = \frac{4}{\sqrt{19}} \quad (3)$$

$$\text{sen } r_2 = \frac{3}{\sqrt{19}} \text{sen } i_2 \quad (4)$$

Substituindo-se (2), (3) e (4) em (1), vem:

$$\frac{3}{\sqrt{19}} \text{sen } i_2 = \text{sen } i_2 \cdot \frac{4}{\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \cos i_2$$

$$3 \text{sen } i_2 = 4 \text{sen } i_2 - \sqrt{3} \cos i_2$$

$$\div \cos i_2: 3 \text{tg } i_2 = 4 \text{tg } i_2 - \sqrt{3}$$

$$\text{tg } i_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{i_2 = 60^\circ}$$

$$\text{Como } i_2 + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}$$

Resposta: $\alpha = 30^\circ$ com a suposição de que a reflexão total ocorra com ângulo muito próximo do ângulo limite.

Morando em quartos separados e visando economizar energia, dois estudantes combinam de interligar em série cada uma de suas lâmpadas de 100 W. Porém, verificando a redução da claridade em cada quarto, um estudante troca a sua lâmpada de 100 W para uma de 200 W, enquanto o outro também troca a sua de 100 W para uma de 50 W. Em termos de claridade, houve vantagem para algum deles? Por quê? Justifique quantitativamente.

Resolução

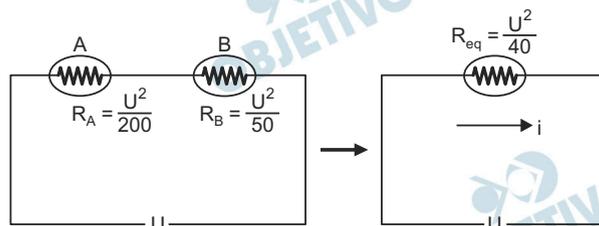
Ao serem ligadas em série, cada lâmpada de 100W fica submetida à metade da tensão elétrica nominal e, conseqüentemente, de $Pot = U^2/R$, suas potências passam a ser 25W.

Seu U a tensão de funcionamento normal das lâmpadas A (200W) e B (50W), temos:

$$P_A = \frac{U^2}{R_A} \Rightarrow 200 = \frac{U^2}{R_A} \Rightarrow R_A = \frac{U^2}{200}$$

$$P_B = \frac{U^2}{R_B} \Rightarrow 50 = \frac{U^2}{R_B} \Rightarrow R_B = \frac{U^2}{50}$$

Associando-se as lâmpadas em série e submetendo-se a associação à tensão U , temos:



$$U = R_{eq} \cdot i \Rightarrow U = \frac{U^2}{40} \cdot i \Rightarrow i = \frac{40}{U}$$

Cálculo das novas potências dissipadas pelas lâmpadas:

Lâmpada A

$$P'_A = R_A \cdot i^2 \Rightarrow P'_A = \frac{U^2}{200} \cdot \left(\frac{40}{U}\right)^2 \Rightarrow P'_A = 8W$$

Lâmpada B

$$P'_B = R_B \cdot i^2 \Rightarrow P'_B = \frac{U^2}{50} \cdot \left(\frac{40}{U}\right)^2 \Rightarrow P'_B = 32W$$

Em relação à situação das lâmpadas de 100W ligadas em série, o morador que utilizou a lâmpada de 50W levou vantagem, em termos de claridade.

Comparando as trocas das lâmpadas efetuadas pelos moradores, também o morador que utilizou a lâmpada de 50W levou vantagem sobre o que utilizou a lâmpada de 200W.

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

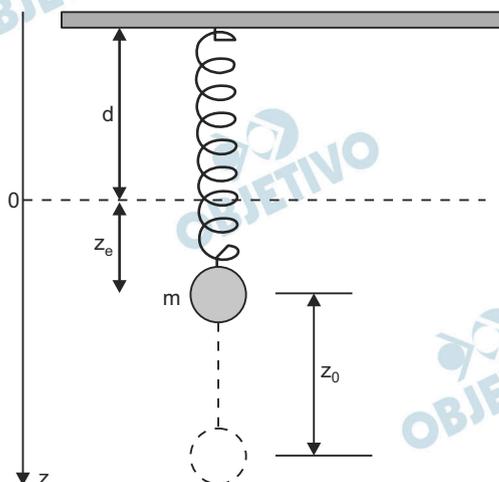
 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

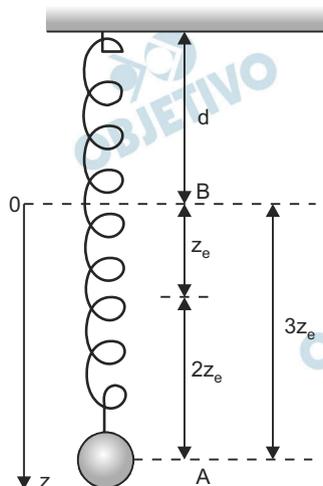
 **OBJETIVO**

Uma massa m suspensa por uma mola elástica hipotética, de constante de mola k e comprimento d , descreve um movimento oscilatório de frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$ quando ela é deslocada para uma posição $z_0 = 2z_e$, abaixo de sua posição de equilíbrio em $z = z_e$, e solta em seguida.



Considerando nula a força da mola para $z < 0$, determine o período de oscilação da massa e os valores de z entre os quais a mesma oscila.

Resolução



- 1) Na posição de equilíbrio, temos:

$$kz_e = mg$$

$$z_e = \frac{mg}{k}$$

- 2) Conservação da energia mecânica entre A e B:

$$E_A = E_B \text{ (referência em A)}$$

$$\frac{k \cdot (3z_e)^2}{2} = mg \cdot 3z_e + \frac{m V_B^2}{2}$$

$$\frac{9k \cdot z_e^2}{2} = 3mgz_e + \frac{m V_B^2}{2}$$

$$\frac{9k}{2} \cdot \frac{m^2 g^2}{k^2} = 3mg \frac{mg}{k} + m \frac{V_B^2}{2}$$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{m g^2}{k} = \frac{3m g^2}{k} + \frac{V_B^2}{2}$$

$$1,5 \frac{m g^2}{k} = \frac{V_B^2}{2}$$

$$\boxed{V_B^2 = \frac{3mg^2}{k} \Rightarrow V_B = g \sqrt{\frac{3m}{k}}}$$

- 3) A partir do ponto B, o corpo fica sob ação exclusiva da gravidade e o tempo de voo até o retorno ao ponto B é dado por:

$$T_1 = \frac{2V_B}{g} = \frac{2}{g} g \sqrt{\frac{3m}{k}}$$

$$\boxed{T_1 = 2 \sqrt{\frac{3m}{k}}}$$

- 4) De A para B, o tempo gasto corresponde a:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} + \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{3}$$

O tempo total para completar o trajeto ABA corresponde a $T_2 = \frac{2T}{3}$.

O período T do MHS é dado por:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

e portanto:

$$\boxed{T_2 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

5) O período T_3 de oscilação do bloco é dado por:

$$T_3 = T_1 + T_2 = 2 \sqrt{\frac{3m}{k}} + \frac{4}{3} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\boxed{T_3 = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(2\sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi \right)}$$

6) A altura máxima sob ação da gravidade é dada por:

$$V^2 = V_B^2 + 2 \gamma \Delta s$$

$$0 = \frac{3 mg^2}{2 k} - 2 g h$$

$$h = \frac{3 mg}{2 k}$$

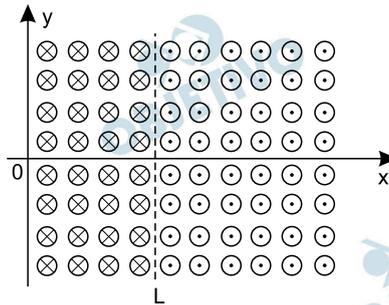
Portanto, o bloco oscila entre as posições:

$$z_{\text{mín}} = -\frac{3 mg}{2 k} \quad \text{e} \quad z_{\text{máx}} = \frac{3 mg}{k}$$

$$\text{Respostas: Período} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(2\sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$-\frac{3 mg}{2 k} \leq z \leq \frac{3 mg}{k}$$

Um próton com uma velocidade $v = 0,80 \times 10^7 \text{ e}_x \text{ m/s}$ move-se ao longo do eixo x de um referencial, entrando numa região em que atuam campos de indução magnéticos. Para x de 0 a L , em que $L = 0,85\text{m}$, atua um campo de intensidade $B = 50 \text{ mT}$ na direção negativa do eixo z . Para $x > L$, um outro campo de mesma intensidade atua na direção positiva do eixo z .



Sendo a massa do próton de $1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ e sua carga elétrica de $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, descreva a trajetória do próton e determine os pontos onde ele cruza a reta $x = 0,85 \text{ m}$ e a reta $y = 0 \text{ m}$.

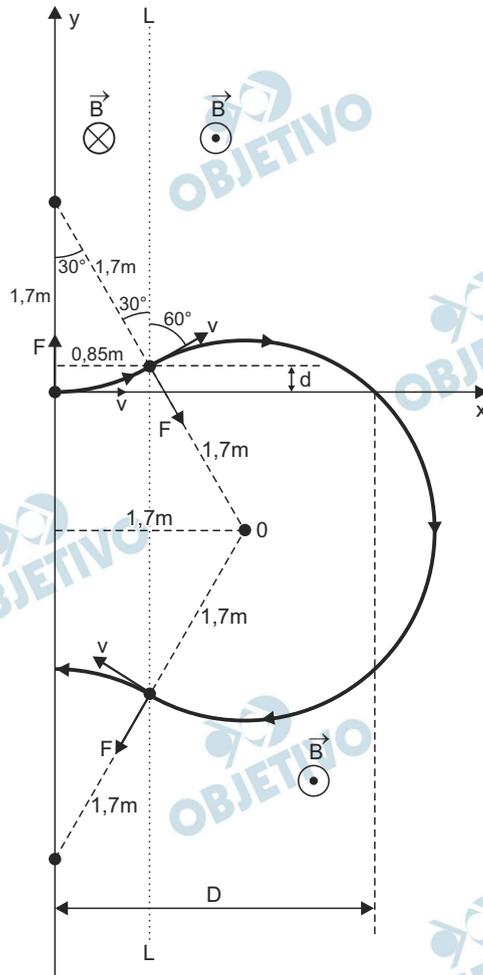
Resolução

Cálculo do raio de curvatura da trajetória descrita pelo próton:

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} \Rightarrow R = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 0,80 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^{-3}} \text{ (m)}$$

$$R = 1,7\text{m}$$

Trajétória do próton:



Cálculo de d:

$$d = 1,7 - 1,7 \cdot \cos 30^\circ$$

$$d = 1,7 - 1,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (m)} \Rightarrow d \cong 0,23 \text{ m}$$

Equação da circunferência de centro O:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\text{Sendo } x_0 = 1,7\text{m e } y_0 = -\left(1,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)$$

$$y_0 = -1,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1,7 - 1,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ m}$$

$$y_0 = -1,7\sqrt{3} + 1,7\text{(m)} \Rightarrow y_0 \cong -1,24\text{m}$$

$$(x - 1,7)^2 + (y + 1,24)^2 = (1,7)^2$$

Pontos onde a circunferência corta a reta $x = 0,85\text{m}$:

$$(0,85 - 1,7)^2 + (y + 1,24)^2 = (1,7)^2$$

$$(y + 1,24)^2 = 2,16$$

$$y + 1,24 = \pm 1,47$$

$$y = -1,47 - 1,24(\text{m}) \Rightarrow \boxed{y \cong -2,71\text{m}}$$

$$y' = +1,47 - 1,24(\text{m}) \Rightarrow \boxed{y' \cong 0,23\text{m}}$$

Cálculo de D, abscissa do ponto onde a trajetória cruza o eixo x:

$$y = 0 \text{ e } x = D$$

$$(D - 1,7)^2 + (0 + 1,24)^2 = (1,7)^2$$

$$(D - 1,7)^2 = 1,35$$

$$D - 1,7 = \pm 1,16$$

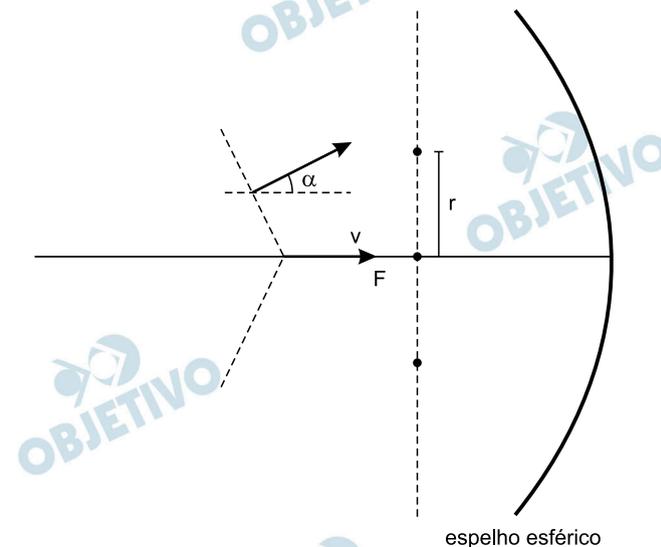
$$D = +1,16 + 1,7(\text{m}) \Rightarrow \boxed{D \cong 2,86\text{m}}$$

$$D' = -1,16 + 1,7(\text{m})$$

$$D' \cong 0,54\text{m} < 0,85\text{m} \text{ (não é solução)}$$

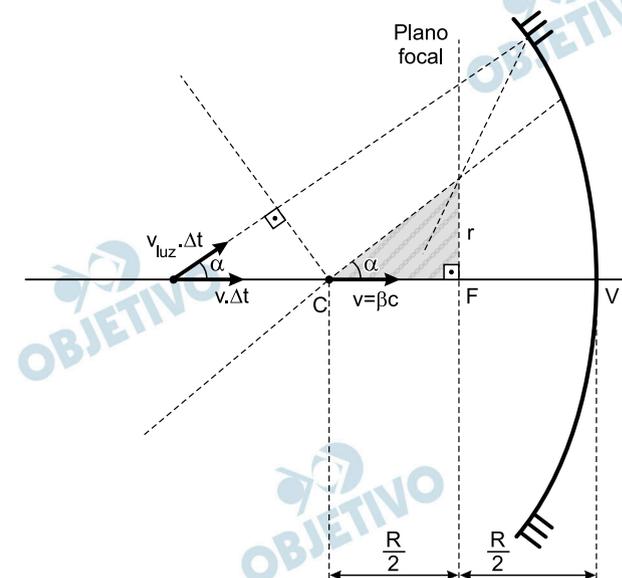
Resposta: O próton cruzou a reta $x = 0,85\text{m}$ nos pontos de ordenadas: $+0,23\text{m}$ e $-2,71\text{m}$ e cruzou o eixo de abscissas em $x = +2,86\text{m}$.

Uma partícula eletricamente carregada move-se num meio de índice de refração n com uma velocidade $v = \beta c$, em que $\beta > 1$ e c é a velocidade da luz. A cada instante, a posição da partícula se constitui no vértice de uma frente de onda cônica de luz por ela produzida que se propaga numa direção α em relação à da trajetória da partícula, incidindo em um espelho esférico de raio R , como mostra a figura. Após se refletirem no espelho, as ondas convergem para um mesmo anel no plano focal do espelho em F .



Calcule o ângulo α e a velocidade v da partícula em função de c , r , R e n .

Resolução



I) Determinação do ângulo α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\frac{R}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2r}{R}$$

Logo: $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2r}{R} \right)$

II) Determinação da velocidade v :

$$\cos \alpha = \frac{v_{\text{luz}} \Delta t}{v \Delta t} \Rightarrow v = \frac{v_{\text{luz}}}{\cos \alpha}$$

$$v = \frac{\frac{c}{n}}{\cos \alpha} \Rightarrow v = \frac{c}{n \cos \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Mas: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2r}{R} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{2r} \operatorname{sen} \alpha \quad (2)$$

Da figura:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}} = \frac{r}{\frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + R^2}}$$

$$\text{Da qual: } \operatorname{sen} \alpha = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + R^2}} \quad (3)$$

$$(3) \text{ em } (2): \cos \alpha = \frac{R}{2r} \cdot \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + R^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{4r^2 + R^2}} \quad (4)$$

$$(4) \text{ em } (1): v = \frac{c}{n \frac{R}{\sqrt{4r^2 + R^2}}}$$

Da qual: $v = \frac{c \sqrt{4r^2 + R^2}}{n R}$

$$\text{Respostas: } \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2r}{R} \right); v = \frac{c \sqrt{4r^2 + R^2}}{n R}$$