NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária $i^2 = -1$

det M : determinante da matriz M

M^{-1} : inversa da matriz M

MN : produto das matrizes M e N

$\overline{AB}$: segmento de retas de extremidades nos pontos A e B

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

1

Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações: .

I. Existe uma bijeção $f : X \to Y$.

II. Existe uma função injetora $g : Y \to X$.

III. O número de funções injetoras $f : X \to Y$ é igual ao número de funções sobrejetoras $g : Y \to X$.

É (são) verdadeira(s)

a) nenhuma delas.

b) apenas I.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) todas.

Resolução

Se X e Y são dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$, então $n(X) < n(Y)$.

I) *Falsa,* pois para existir uma função bijetora $f: X \to Y$, deveríamos ter $n(X) = n(Y)$.

II) *Falsa,* pois tendo Y mais elementos do que X, para existir uma função $g: Y \to X$, pelo menos dois elementos distintos *a* e *b* de Y deverão ter a mesma imagem ($g(a) = g(b)$) e portanto *g* nunca será injetora.

III) ***Falsa.*** **Consideremos X = {a; b; c} e Y = {a; b; c; d}**

O número de funções f: X → Y injetoras é

$A_{4;\,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

O número de funções g: Y → X sobrejetoras é

$3 \,.\, C_{4;\,2} \,.\, 2 = 36$, pois para g ser sobrejetora, um, e apenas um, elemento de X deverá ser imagem de dois elementos distintos de Y. Existem 3 maneiras de escolher este elemento, $C_{4;\,2}$ formas de escolher de que elementos de Y ele será imagem e 2 maneiras de associar os outros dois elementos de Y.

Para este exemplo, o número de funções f: X → Y injetoras não é igual ao número de funções sobrejetoras g: Y → X.

Resposta: A

2

O número de soluções da equação

$(1 + \sec\theta)(1 + \text{cossec}\,\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Resolução

I) $(1 + \sec\theta) \,.\, (1 + \text{cossec}\,\theta) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \sec\theta = 0$ **ou** $1 + \text{cossec}\,\theta = 0$,

com $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, \pi$ **e** $\theta \neq n\,\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

II) $1 + \sec\theta = 0 \Leftrightarrow \sec\theta = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi + n \,.\, 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

III) $1 + \text{cossec}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \text{cossec}\,\theta = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2} + n \,.\, 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

De (I), (II) e (III), concluímos que o o número de soluções é zero.

Resposta: A

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que a, b/2, c/4, d – 140 formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de d – b é

a) –140.

b) –120.

c) 0.

d) 120.

e) 140.

Resolução

Seja (a; b; c; d) uma progressão geométrica de razão q. Como $\left(a; \frac{b}{2}; \frac{c}{4}; d - 140\right)$ é uma progressão aritmética, temos:

$$\text{I)}\quad \frac{b}{2} = \frac{a + \frac{c}{4}}{2} \Leftrightarrow \frac{aq}{2} = \frac{a + \frac{aq^2}{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aq^2 - 4aq + 4a = 0 \Leftrightarrow a\,.\,(q-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ (não convém) ou } q = 2$$

$$\text{II)}\quad \frac{c}{4} = \frac{\frac{b}{2} + d - 140}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{aq^2}{4} = \frac{\frac{aq}{2} + aq^3 - 140}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aq^2 = aq + 2aq^3 - 280$$

Para q = 2, vem: $4a = 2a + 16a - 280 \Leftrightarrow a = 20$

Logo, a progressão geométrica de primeiro termo 20 e razão 2 será (20, 40, 80, 160) e, portanto, $d - b = 160 - 40 = 120$

Resposta: D

O maior valor de tg x, com $x = \frac{1}{2} \text{ arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) 1/4.
b) 1/3.
c) 1/2.
d) 2.
e) 3.

Resolução

$$x = \frac{1}{2} \text{ arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) \text{ e } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{sen } 2x = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \text{ sen x cos x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\text{sen x . cos x}}{\cos^2 x} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg x} = \frac{3}{10} \text{ . } \sec^2 x \Rightarrow 10 \text{ . tg x} = 3 \text{ . } (\text{tg}^2 x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \text{ tg}^2 x - 10 \text{ tg x} + 3 = 0 \Leftrightarrow \text{tg x} = 3 \text{ ou tg x} = \frac{1}{3}$$

Admitindo-se como intervalo de variação da função arcsen θ o conjunto $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, como tradicionalmente se faz, temos:

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e, portanto, a única solução possível é $\text{tg x} = \frac{1}{3}$

Resposta: B

Considere a reta r: y = 2x. Seja A = (3, 3) o vértice de um quadrado ABCD, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em r. A área deste quadrado é

a) $\dfrac{9}{5}$.

b) $\dfrac{12}{5}$.

c) $\dfrac{18}{5}$.

d) $\dfrac{21}{5}$.

e) $\dfrac{24}{5}$.

Resolução

Seja d a medida da diagonal do quadrado.

A distância do ponto A(3; 3) à reta r de equação $y = 2x \Leftrightarrow 2x - y = 0$ é igual a $\dfrac{d}{2}$.

Então,

$$\frac{d}{2} = \frac{|2 \,.\, 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Assim, $d = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ e a área do quadrado ABCD é

$$\frac{\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}{2} = \frac{\dfrac{36}{5}}{2} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

Resposta: C

Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{27}{y^2} + \dfrac{8}{z^3} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{81}{y^2} + \dfrac{40}{z^3} = 10 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{54}{y^2} + \dfrac{24}{z^3} = 7 \end{cases}.$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

a) 0. b) 3. c) 6.

d) 9. e) 12.

Resolução

Fazendo $\dfrac{1}{x} = a, \dfrac{1}{y^2} = b, \dfrac{1}{z^3} = c$, **temos:**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{27}{y^2} + \dfrac{8}{z^3} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{81}{y^2} + \dfrac{40}{z^3} = 10 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{54}{y^2} + \dfrac{24}{z^3} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 27b + 8c = 3 \\ 4a + 81b + 40c = 10 \\ 2a + 54b + 24c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 27b + 8c = 3 \\ -27b + 8c = -2 \\ 8c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{9} \\ c = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Logo: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| + |y| + |z| = 1 + 3 + 2 = 6$

Resposta: C

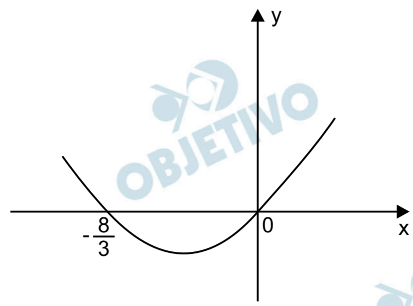
7

O número de soluções inteiras da inequação
$0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$ é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução

Considerando que o gráfico da função $y = 3x^2 + 8x$ é do tipo



Temos:

I) Para $-\frac{8}{3} \leq x \leq 0$:

$$0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - (-3x^2 - 8x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

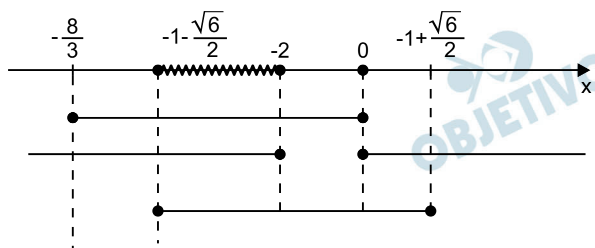
$$\Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 + 8x \leq 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x \geq 0 \text{ e}$$

$$4x^2 + 8x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0 \text{ e}$$

$$2x^2 + 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq 0) \text{ e}$$

$$\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Assim:



$$V_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 0\right\}$$

II) Para $x \leq -\frac{8}{3}$ ou $x \geq 0$:

$$0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - (3x^2 + 8x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

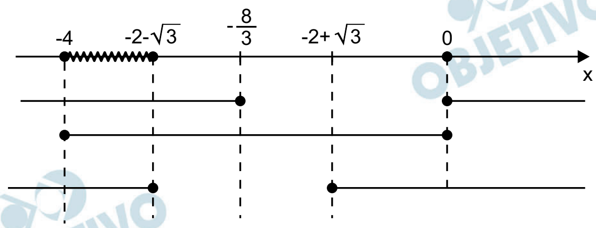
$$\Leftrightarrow 0 \leq -2x^2 - 8x \leq 2 \Leftrightarrow -2x^2 - 8x \geq 0 \text{ e}$$

$$-2x^2 - 8x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x \leq 0 \text{ e}$$

$$x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (-4 \leq x \leq 0) \text{ e}$$

$$(x \leq -2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geq -2 + \sqrt{3})$$

Assim:

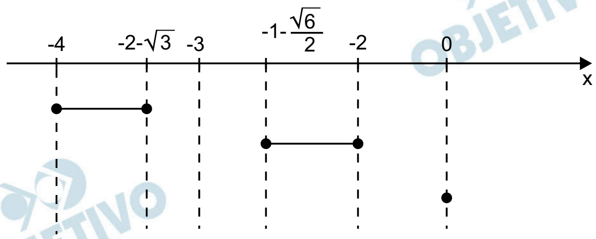


$V_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le -2-\sqrt{3} \text{ ou } x = 0\}$

Desta forma, o conjunto solução da inequação é

$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le -2-\sqrt{3} \text{ ou } \right.$

$\left. -1-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \le x \le -2 \text{ ou } x = 0 \right\}$ pois



Neste conjunto, são inteiros -4, -2 e 0, portanto, três soluções.

Resposta: C

Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {–1, –2, –3, –4, –5}. Se C = {xy : x ∈ A e y ∈ B}, então o número de elementos de C é

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

Resolução

A = {1; 2; 3; 4; 5}, B = {–1; –2; –3; –4; –5} e

C = {xy : x ∈ A e y ∈ B} =

= {–1;–2;–3;–4;–5;–6;–8;–9;–10;–12;–15;–16;–20;–25}

Portanto, o número de elementos de C é 14.

Resposta: E

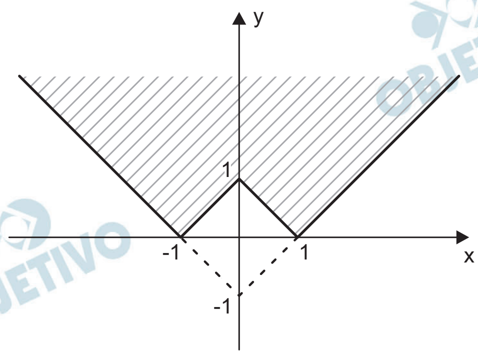
Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \left||x| - 1\right|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

a) $\dfrac{25}{4}\pi - 2.$ b) $\dfrac{25}{4}\pi - 1.$ c) $\dfrac{25}{4}\pi.$

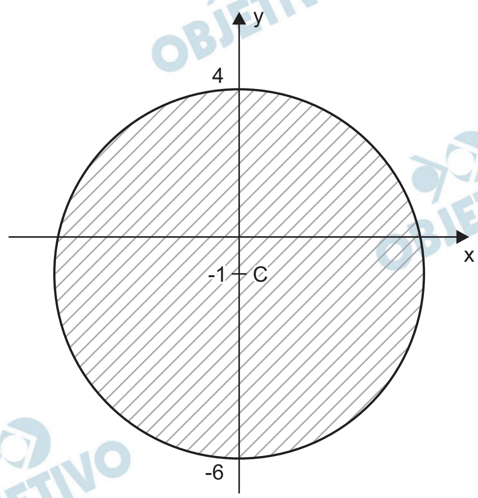
d) $\dfrac{75}{4}\pi - 1.$ e) $\dfrac{75}{4}\pi - 2.$

Resolução

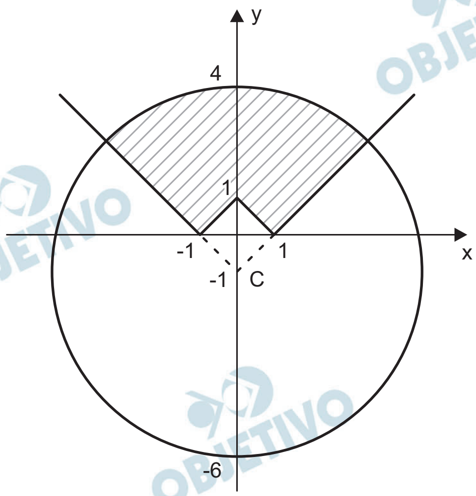
$\mathbf{S_1: y \geq \left||x| - 1\right|}$



$\mathbf{S_2: x^2 + (y + 1)^2 \leq 25}$**; círculo de centro C(0; –1) e raio 5.**



$S_1 \cap S_2$:



$$\text{Área} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi\, 5^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{25\pi}{4} - 2$$

Resposta: A

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) todas.

Resolução

Sendo a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1, tem-se:

I. *Verdadeira.*

$$a^{(\log_c b)} = a^{\left(\frac{\log_a b}{\log_a c}\right)} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$

II. *Verdadeira.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} =$$

$$= \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}} =$$

$$= \frac{\cancel{a^{\log_d c}}}{\cancel{b^{\log_d c}}} \cdot \frac{\cancel{a^{\log_d b}}}{\cancel{a^{\log_d c}}} \cdot \frac{\cancel{b^{\log_d c}}}{\cancel{a^{\log_d b}}} = 1$$

III) *Falsa*. Por exemplo, considere a = 5; b = 2 e c = 3, assim, $\log_{ab}(bc) = \log_{5.2}(2 . 3) = \log_{10} 6 \neq \log_5 3$

Resposta: C

Sejam D = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e P = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

a) 144.

b) 180.

c) 240.

d) 324.

e) 360.

Resolução

$$A = P^{-1} \,.\, D \,.\, P$$

$$A^2 = A \,.\, A = P^{-1} \,.\, D \,.\, \underbrace{P \,.\, P^{-1}}_{= I} \,.\, D \,.\, P = P^{-1} \,.\, D^2 \,.\, P$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + A = P^{-1} \,.\, D^2 \,.\, P + P^{-1} \,.\, D \,.\, P = P^{-1} \,.\, (D^2 + D) \,.\, P$$

$$\det(A^2 + A) = \det P^{-1} \,.\, \det(D^2 + D) \,.\, \det P$$

$$\det(A^2 + A) = \det(D^2 + D) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 144$$

Resposta: A

Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\dfrac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\dfrac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{123}}{2}$.

b) $\dfrac{\sqrt{129}}{2}$.

c) $\dfrac{\sqrt{131}}{2}$.

d) $\dfrac{\sqrt{135}}{2}$.

e) $\dfrac{\sqrt{137}}{2}$.

Resolução

I) As medidas dos raios r_1 e r_2 são:

$$\pi r_1^2 = \frac{\pi}{16} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{4} \text{ e } \pi r_2^2 = 144\pi \Rightarrow r_2 = 12$$

II) PG $\left(x_1, y_1, \dfrac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} \\ y_1^2 = \dfrac{x_1}{4} \end{cases} \Rightarrow 4y_1^2 + y_1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8y_1^2 + 2y_1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } y_2 = -\frac{3}{4} \text{ (não convém);}$$

Logo: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{x_1}{4} \Rightarrow x_1 = 1$; **portanto, o centro de C_1 é dado por $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.**

III) PG $(x_2, y_2, 12)$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + 12 = 21 \\ y_2^2 = 12\,x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{y_2^2}{12} + y_2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y_2^2 + 12y_2 - 108 = 0 \Leftrightarrow y = 6$ ou $y = -18$ (não convém)

Logo: $6^2 = 12\,x_2 \Rightarrow x_2 = 3$; portanto, o centro de C_2 é dado por $(3; 6)$.

IV) A distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a:

$$\sqrt{(3-1)^2 + \left(6 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{137}{4}} = \frac{\sqrt{137}}{2}$$

Resposta: $\boxed{E}$

Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos.

II. Existe um número $x \in [0, \pi/2]$ de tal modo que os números $a_1 = \text{sen}\, x$, $a_2 = \text{sen}\,(x + \pi/4)$, $a_3 = \text{sen}\,(x + \pi/2)$ e $a_4 = \text{sen}\,(x + 3\pi/4)$ estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.

III. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional.

é são verdadeiras(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) todas.

Resolução

I. ***Verdadeira*, pois todo número inteiro positivo é par ou ímpar.**
Se o número considerado for ímpar, pode ser escrito na forma (2m – 1) com m inteiro positivo e, neste caso, basta k = 1.
Se o número considerado for par, é da forma $2^p \cdot q$, com q ímpar e p natural não nulo. Neste caso, existem m e k inteiros positivos tais que
$k - 1 = p \Leftrightarrow k = p + 1$ e $(2m - 1) = q$.

II) ***Falsa*, pois se**

$a_1 = \text{sen}\, x$, $a_2 = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **e**

$a_3 = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **estiverem, nesta ordem, em progressão geométrica, deveríamos ter:**

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Leftrightarrow \text{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{sen}\, x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \cos x\right]^2 =$$

$$= \text{sen}\, x \cdot \left(\text{sen}\, x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \cos x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\, x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right]^2 = \text{sen}\, x \cdot \cos x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\text{sen}^2x + 2\ \text{sen}\ x\ .\cos x + \cos^2x) = \text{sen}\ x\ .\ \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + \text{sen}\ x\ .\ \cos x = \text{sen}\ x\ .\ \cos x$, que é absurdo.

III. *Falsa*, pois

Se $\sqrt{p}$ for racional inteiro, então $\sqrt{p} = m \in \mathbb{Z}^*_+ - \{1\}$ e $p = m^2 = m\ .\ m$ não seria primo.

Se $\sqrt{p}$ for racional não inteiro, existem m e n inteiros positivos não nulos e primos entre si (com $n \neq 1$), tal que $\sqrt{p} = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow p = \dfrac{m^2}{n^2}$ e p não seria inteiro. Portanto, não seria primo.

Resposta: A

Com os elementos 1, 2, ..., 10 são formadas todas as sequências (a_1, a_2, ..., a_7). Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

a) $\dfrac{7!}{10^7 \,.\, 3!}$.

b) $\dfrac{10!}{10^7 \,.\, 3!}$.

c) $\dfrac{3!}{10^7 \,.\, 7!}$.

d) $\dfrac{10!}{10^3 \,.\, 7!}$.

e) $\dfrac{10!}{10^7}$.

Resolução

A probabilidade pedida é

$$\frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{10^7} =$$

$$= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{10^7 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = \frac{10!}{10^7 \,.\, 3!}$$

Resposta: B

Considere a equação $(a - bi)^{501} = \dfrac{2\,(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1}$.

O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

a) 500. b) 501. c) 502.

d) 503. e) 504.

Resolução

1) $$(a - bi)^{501} = \frac{2\,(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - bi)^{502} = \frac{2\,(a + bi)\,(a - bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - bi)^{502} = \frac{2\,(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^{502} = \frac{2\,|z|^2}{|z|^{500} + 1} \quad \text{(I)}, \quad \text{com } z = a - bi$$

2) Como $\dfrac{2\,|z|^2}{|z|^{500} + 1} \in \mathbb{R}$ e $|z^{502}| = |z|^{502}$

resulta de (I) que

$$|z^{502}| = \left| \frac{2\,|z|^2}{|z|^{500} + 1} \right| = |z^{502}| = \frac{2\,|z|^2}{|z|^{500} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^{1002} + |z|^{502} - 2\,|z|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 . \left[|z|^{1000} + |z|^{500} - 2 \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \text{ ou } |z^{500}| = 1$$

3) Para $|z|^2 = 0$, em (I), resulta:

$$z^{502} = \frac{2 . 0}{0^{250} + 1} \Leftrightarrow z^{502} = 0 \text{ e, portanto, } \boxed{z = 0}$$

4) Para $|z^{500}| = 1$, resulta $|z| = 1$ e, substituindo em (I), temos:

$$Z^{502} = \frac{2 . 1^2}{1 + 1} \Leftrightarrow z^{502} = 1, \text{ que possui 502 soluções}$$

distintas, pois $z = \sqrt[502]{1}$.

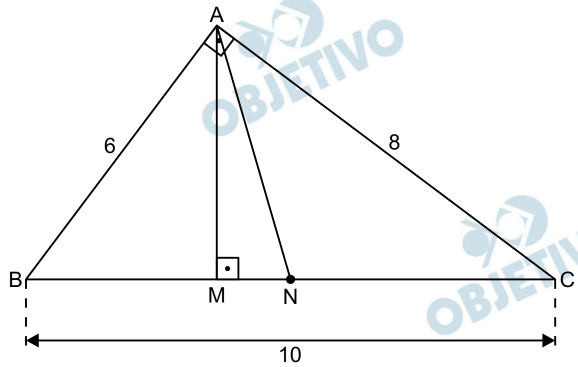
Assim, a equação dada possui 503 soluções.

Resposta: D

Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado $\overline{BC}$ tais que $\overline{AM}$ é a altura relativa a $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. A área do triângulo AMN, em cm^2, é

a) 3,36. b) 3,60. c) 4,20. d) 4,48. e) 6,72.

Resolução



O triângulo ABC é retiangulo em A, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$. Assim, considerando as medidas em centímetros, temos:

I) $AN = BN = CN = \dfrac{10}{2} = 5$

II) $(AM) . (BC) = (AB) . (AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow AM . 10 = 6 . 8 \Rightarrow AM = 4,8$

III) $(AB)^2 = (BC) . (BM) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^2 = 10 . BM \Rightarrow BM = 3,6$

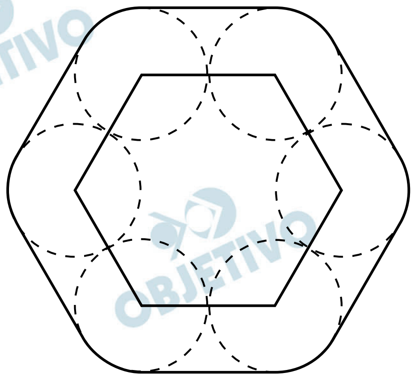
IV) $MN = BN - BM = 5 - 3,6 = 1,4$

Logo, a área S do triângulo AMN, em centímetros quadrados, é dada por:

$$S = \frac{(MN) . (AM)}{2} = \frac{1,4 . 4,8}{2} = 3,36$$

Resposta: A

Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $18 + 3\pi$.

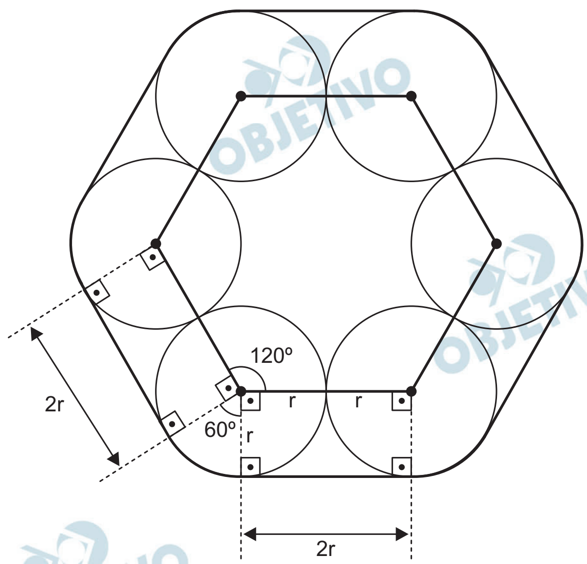
b) $30 + 10\pi$.

c) $18 + 6\pi$.

d) $60 + 10\pi$.

e) $36 + 6\pi$.

Resolução



Sejam r = 5 cm a medida do raio e C o comprimento, em centímetros, da correia que envolve externamente as seis circunferências.

C é dado pela soma de seis segmentos de reta de medidas 2r e seis arcos de circunferência de 60° e raio r.

Assim, $C = 6 \cdot 2r + 6 \cdot \dfrac{60°}{360°} \cdot 2\pi r =$

$= 6 \cdot 2 \cdot 5 + 6 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 5 = 60 + 10\pi$

Resposta: D

O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

a) uma circunferência.

b) uma parábola.

c) uma hipérbole.

d) uma reta.

e) duas retas paralelas.

Resolução

Sendo αi, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$, uma raiz "puramente imaginária" da equação

$z^2 + z + 2 - (a + bi) = 0$, temos:

$(\alpha i)^2 + \alpha i + 2 - a - bi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-\alpha^2 + 2 - a) + (\alpha - b)i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2 + 2 - a = 0 \\ \alpha - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -b^2 + 2 - a = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b^2 = 2 - a$ (com $b \neq 0$), que é a equação de uma parábola, sem o ponto $(2; 0)$.

Resposta: B

19

Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de 2/3, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

a) $\dfrac{120}{160}$.

b) $\dfrac{119}{154}$.

c) $\dfrac{110}{144}$.

d) $\dfrac{105}{135}$.

e) $\dfrac{119}{144}$.

Resolução

Sejam p_1, p_2 e p_3, respectivamente, as probabilidades do primeiro, do segundo e do terceiro alvo serem acertados pelo atirador.

$$p_1 = \frac{k}{30^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 10^2}{3} = 6 \cdot 10^2$$

$$p_2 = \frac{k}{40^2} = \frac{6 \cdot 10^2}{40^2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$p_3 = \frac{k}{60^2} = \frac{6 \cdot 10^2}{60^2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade de não acertar nenhum dos alvos é:

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{144}$$

Então, a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é:

$$p = 1 - \frac{25}{144} = \frac{119}{144}$$

Resposta: $\boxed{E}$

Considere o triângulo ABC, em que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja D um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja E um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de D, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em cm, de $\overline{CE}$ é tal que

a) $\dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

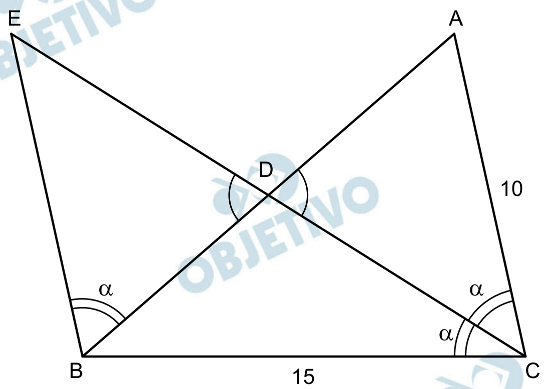
b) $\dfrac{13\sqrt{6}}{3}$.

c) $\dfrac{17\sqrt{6}}{3}$.

d) $\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$.

e) $\dfrac{25\sqrt{6}}{3}$.

Resolução



Vamos considerar todas as medidas em centímetros.

I) Aplicando o teorema da bissetriz do ângulo interno no triângulo ABC, temos:

$$\frac{15}{BD} = \frac{10}{20 - BD} \Rightarrow \frac{3}{BD} = \frac{2}{20 - BD} \Rightarrow BD = 12$$

Assim, BD = 12 e AD = 20 – 12 ⇔ AD = 8

II) Aplicando-se a lei dos cossenos nos triângulos BCD e ACD, temos:

$$\begin{cases} (BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2(BC) \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \\ (AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12^2 = 15^2 + (CD)^2 - 2 \cdot 15 \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \\ 8^2 = 10^2 + (CD)^2 - 2 \cdot 10 \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 144 = 225 + (CD)^2 - 30 \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \\ 64 = 100 + (CD)^2 - 20 \cdot (CD) \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

Substraindo a 2ª equação da 1ª equação, temos:

$$80 = 125 - 10 \,.\, (CD) \cos \alpha \Rightarrow (CD) \,.\, \cos \alpha = \frac{9}{2}$$

Substituindo (CD) . cos α na 1ª equação, temos:

$$144 = 225 + (CD)^2 - 30 \,.\, \frac{9}{2} \Rightarrow (CD)^2 = 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CD) = 3\sqrt{6}$$

III) Da semelhança dos triângulos BDE e CDA, temos:

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{DE}{8} = \frac{12}{3\sqrt{6}} \Rightarrow DE = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

Logo:

$$CE = CD + DE = 3\sqrt{6} + \frac{16\sqrt{6}}{3} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$

Resposta: E

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Considere as retas de equações

$$r: y = \sqrt{2}x + a \text{ e } s: y = bx + c,$$

em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por (0, 1) e s, por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

Resolução

Sendo r: $y = \sqrt{2} \cdot x + a$ e s: $y = b \cdot x + c$ perpendiculares entre si, com r passando por (0; 1) e s, por $(\sqrt{2}; 4)$, temos:

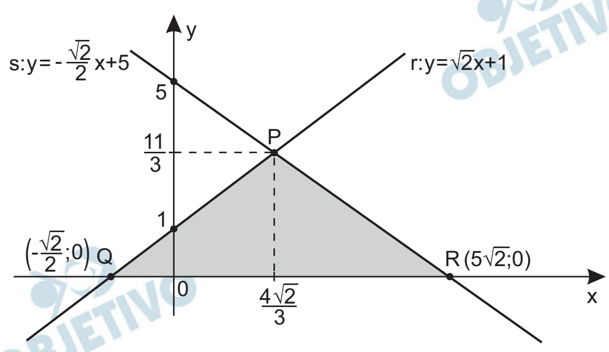
I) $m_r \cdot m_s = \sqrt{2} \cdot b = -1 \Leftrightarrow b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

II) $(0; 1) \in r: 1 = \sqrt{2} \cdot 0 + a \Leftrightarrow a = 1$

III) $(\sqrt{2}; 4) \in s: 4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + c \Leftrightarrow c = 5$

Se $P(x_p; y_p)$ for a intersecção entre as retas r e s, então:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2} \cdot x + 1 \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ y_p = \dfrac{11}{3} \end{cases}$$



Logo, a área do triângulo PQR, formado pelas retas r, s e o eixo x é igual a:

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 5\sqrt{2}\right) \cdot \dfrac{11}{3}}{2} = \frac{121 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Resposta: $\dfrac{121 \cdot \sqrt{2}}{12}$

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Resolução

$$4^{3x-1} > 3^{4x} \Leftrightarrow \frac{4^{3x}}{4} > 3^{4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{64^x}{81^x} > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{64}{81}\right)^x > 4 \Leftrightarrow x < \log_{\left(\frac{64}{81}\right)} 4$$

Resposta: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\left(\frac{64}{81}\right)} 4 \right\}$

23

Considere o polinômio

$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2.$

a) Determine os números reais a e b tais que

$p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2).$

b) Determine as raízes de p(x).

Resolução

a) $\mathbf{p(x) = (x^2 + ax + 1)\ (x^2 + bx + 2) =}$

$= x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax^3 + abx^2 + 2ax + x^2 + bx + 2 =$

$= x^4 + (a + b)\ x^3 + (3 + ab)\ x^2 + (2a + b)\ x + 2$

Assim, devemos ter:

$x^4 + (a + b)\ x^3 + (3 + ab)\ x^2 + (2a + b)\ x + 2 =$

$= x^4 - (1 + 2\sqrt{3})\ x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$

Do que se conclui que:

$$\begin{cases} a + b = -1 - 2\sqrt{3} \\ 3 + ab = 3 + 2\sqrt{3} \\ 2a + b = -1 - 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

b) $\mathbf{p(x) = (x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1)\ .\ (x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$ **ou** $x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ **ou** $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ **ou**

$x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}\, i$ **ou** $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}\, i$

Respostas: a) $a = -2\sqrt{3}$ **e** $b = -1$

b) $\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2},$

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}\, i, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}\, i$

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?

Resolução

1) **Para $f: B \to A$ ser sobrejetiva, os três elementos de A deverão ser imagens. Desta maneira, o conjunto B deverá ser "partido" em três subconjuntos não vazios. Cada um deles deverá ter seus elementos associados a um dos elementos (distinto) de A.**
2) **O conjunto B, com 5 elementos, pode ser "partido" da seguinte forma:**
   - **2.1) Um subconjunto com três elementos e dois subconjuntos com um elemento cada um. Existem $C_{5;\,3} = 10$ formas de se obter estes subconjuntos.**
   - **2.2) Um subconjunto com um elemento e dois subconjuntos com dois elementos cada um. Existem $\dfrac{5 \,.\, C_{4;2}}{2} = 15$ formas de se obter estes subconjuntos.**
3) **Para cada partição feita, existem $P_3 = 3! = 6$ formas de associá-las a elementos de A.**
   Desta maneira, existem:

$$\left(C_{5;3} + \frac{5 \,.\, C_{4;2}}{2}\right) .\, P_3 = (10 + 15) \,.\, 6 = 150$$

funções sobrejetivas $f: B \to A$

Resposta: 150 funções sobrejetivas.

Sejam A = {1, 2, …, 29, 30) o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \dfrac{3}{2}$.

b) Escreva $q = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Determine o maior valor possível para n.

Resolução

A = (1, 2, 3, ..., 29, 30) e $(a_1; a_2; a_3)$ é PG crescente de razão $q > 1$.

a) $q = \dfrac{3}{2} \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = \left(a_1; a_1 \cdot \dfrac{3}{2}; a_1 \cdot \dfrac{9}{4}\right)$

Assim: $a_1 = 4 \Rightarrow (4; 6; 9)$

$a_1 = 8 \Rightarrow (8; 12; 18)$

$a_1 = 12 \Rightarrow (12; 18; 27)$

b) $q = \dfrac{m}{n}$ **e mdc (m. n) = 1** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **PG** $\left(a_1; a_1 \cdot \dfrac{m}{n}; a_1 \cdot \dfrac{m^2}{n^2}\right)$.

Como $a_1 \cdot \dfrac{m^2}{n^2} \in A$ **e mdc** $(m^2, n^2) = 1$**, o maior valor possível para n é 4 e, neste caso, os valores de m e a_1 são respectivamente 5 e 16.**

A PG é $\left(16; 16 \cdot \dfrac{5}{4}; 16 \cdot \dfrac{25}{16}\right) = (16; 20; 25)$

Respostas: a) (4; 6; 9), (8; 12; 18) e (12; 18; 27)

b) n = 4

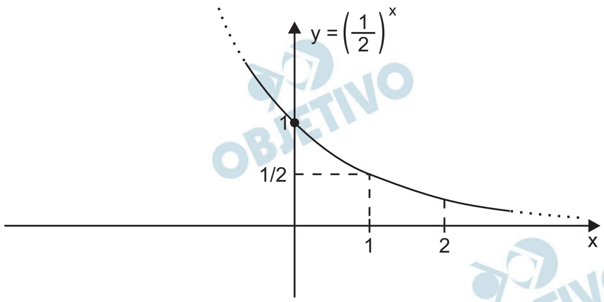
26

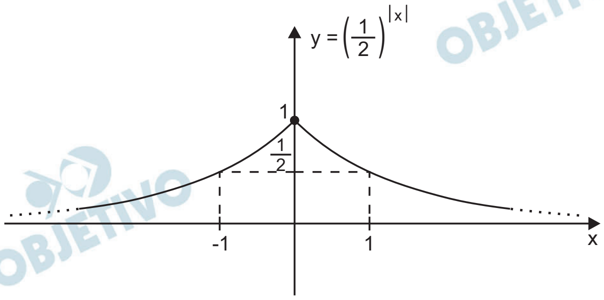
Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

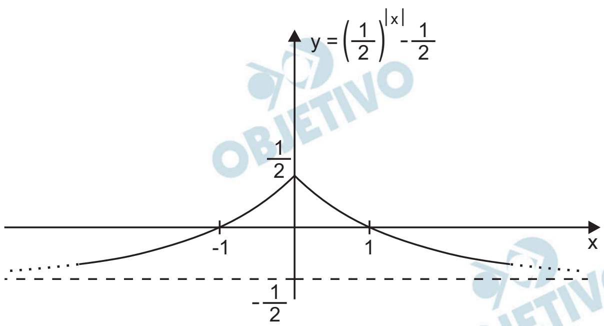
$$f(x) = \left| 2^{-|x|} - \frac{1}{2} \right|.$$

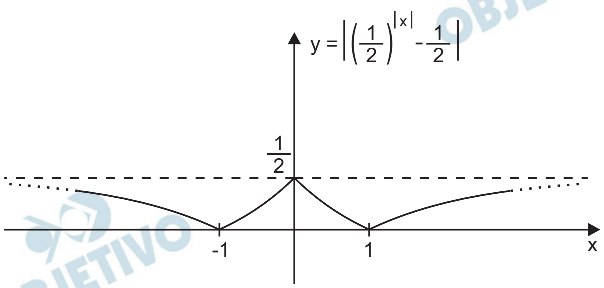
Resolução

$$\mathbf{f(x) = \left| 2^{-|x|} - \frac{1}{2} \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - \frac{1}{2} \right|}$$

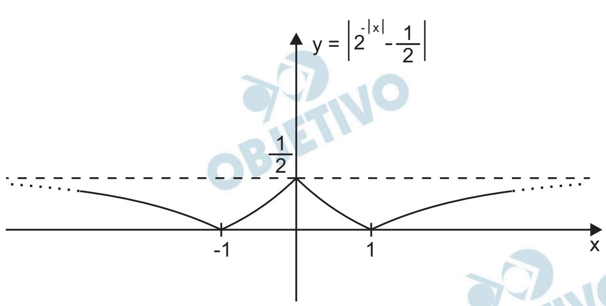








Resposta:



Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

Resolução

O sistema será impossível se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2a + 9a + 6 + a^2 = 0$ **e** $-10 - 3a + 12 + 5a \neq 0 \Leftrightarrow$

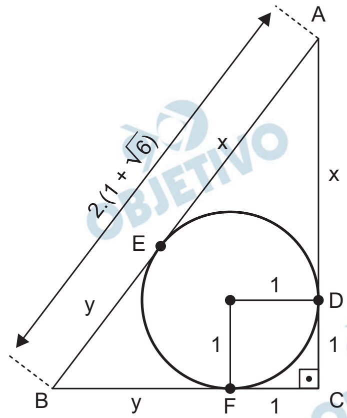
$\Leftrightarrow a^2 + 7a + 6 = 0$ **e** $2a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a = -1$ **ou** $a = -6)$ **e** $a \neq -1 \Leftrightarrow a = -6$

Resposta: $a = -6$

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2(1 + \sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

Resolução



Seja r a medida do raio do círculo.

I) Sendo S a área do triângulo, temos:

$$S = \frac{(BC).(AC)}{2} = \frac{(y+1).(x+1)}{2} =$$

$$= \frac{xy + x + y + 1}{2} \quad e$$

$$S = \frac{AB + BC + AC}{2} . r =$$

$$= \frac{x + y + y + 1 + x + 1}{2} . r =$$

$$= \frac{2x + 2y + 2}{2} . 1 = x + y + 1$$

Assim, $\frac{xy + x + y + 1}{2} = x + y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = x + y + 1 \Rightarrow xy = 2 . (1 + \sqrt{6}) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = 3 + 2\sqrt{6}$

II) $\begin{cases} x + y = 2 . (1 + \sqrt{6}) \\ x . y = 3 + 2\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 2\sqrt{6} - x \\ x . y = 3 + 2\sqrt{6} \end{cases}$

Assim, $x . (2 + 2\sqrt{6} - x) = 3 + 2\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + (2 + 2\sqrt{6})x - (3 + 2\sqrt{6}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - (2 + 2\sqrt{6})x + 3 + 2\sqrt{6} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{6} \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{6} \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 3 + \sqrt{6}$ ou $x = -1 + \sqrt{6}$

Como $x + y = 2 + 2\sqrt{6}$, temos:

$x = 3 + \sqrt{6} \Rightarrow y = -1 + \sqrt{6}$ e

$x = -1 + \sqrt{6} \Rightarrow y = 3 + \sqrt{6}$

III) Como o cone é obtido ao girar o triângulo em torno do maior cateto, o raio da base R do cone é o menor cateto.

Assim, $R = -1 + \sqrt{6} + 1 \Rightarrow R = \sqrt{6}$

IV) Como a geratriz g do cone mede $2 \cdot (1 + \sqrt{6})$, a área total A_T da superfície do cone é dada por:

$A_T = \pi R^2 + \pi R g =$

$= \pi \cdot (\sqrt{6})^2 + \pi \cdot \sqrt{6} \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{6}) =$

$= 6\pi + 2\sqrt{6}\,\pi + 12\pi = 2\pi \cdot (9 + \sqrt{6})$

Resposta: $2\pi \cdot (9 + \sqrt{6})$

Determine o conjunto das soluções reais da equação

$$3\text{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{tg}^2 x = 1.$$

Resolução

$$3\text{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{tg}^2(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\text{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \text{tg}^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Como $\cos(x) = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$, segue-se que:

$$\frac{3}{\frac{1-\cos(x)}{2}} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow 3\cos^2(x) = \frac{1-\cos(x)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

Assim:

$$\cos(x) = \frac{-1 \pm 5}{12} \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{3} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

Se $\cos(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

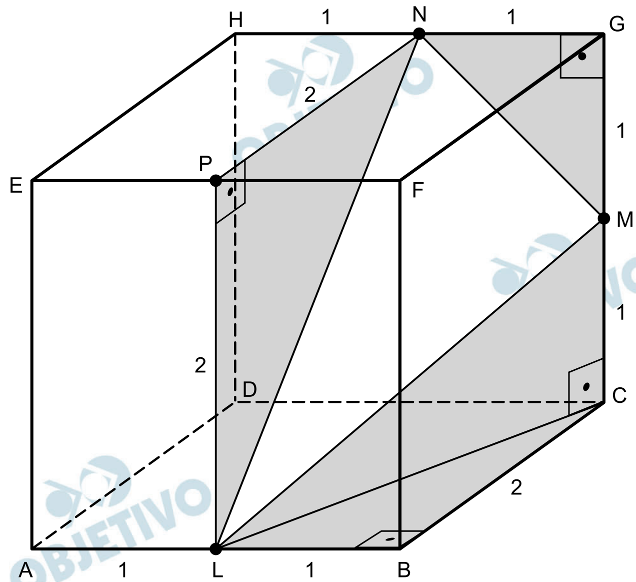
Se $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi; \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \text{ em que } n \in \mathbb{Z}\right\}$$

30

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

Resolução



De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

I) $(MN)^2 = (MG)^2 + (GN)^2 \Rightarrow (MN)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = \sqrt{2}$

II) Sendo P o ponto médio de EF, temos

$NP = PL = 2$

Assim, $(NL)^2 = (NP)^2 + (PL)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (NL)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow NL = 2\sqrt{2}$

III) $(CL)^2 = (CB)^2 + (BL)^2 \Rightarrow (CL)^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CL = \sqrt{5}$

IV) $(ML)^2 = (MC)^2 + (CL)^2 \Rightarrow (ML)^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ML = \sqrt{6}$

Logo, o triângulo LMN é retângulo em M, pois $(NL)^2 = (MN)^2 + (ML)^2$**. Assim, sua área S é dada por:**

$$S = \frac{(MN) \cdot (ML)}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: $\sqrt{3}$