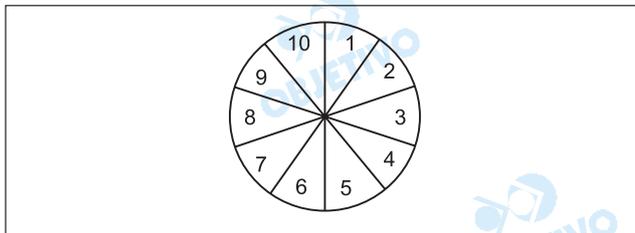


# MATEMÁTICA

1

Um jogo consiste num dispositivo eletrônico na forma de um círculo dividido em 10 setores iguais numerados, como mostra a figura.



Em cada jogada, um único setor do círculo se ilumina. Todos os setores com números pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, o mesmo acontecendo com os setores com números ímpares. Além disso, a probabilidade de ocorrer o número 3 é o dobro da probabilidade de ocorrer o número 4. Denotando por  $p(i)$  a probabilidade de, numa jogada, ocorrer o número  $i$ , determine:

- $p(3)$  e  $p(4)$ .
- a probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2.

### Resolução

Seja  $p(\text{ímpar})$  e  $p(\text{par})$ , respectivamente, a probabilidade de ocorrer um número ímpar e um número de par, numa jogada, temos:

$$\begin{cases} p(\text{ímpar}) + p(\text{par}) = 1 \\ p(\text{ímpar}) = 2p(\text{par}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\text{ímpar}) = \frac{2}{3} \\ p(\text{par}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a) p(3) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{ímpar}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$p(4) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{par}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

- b) A probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2 é

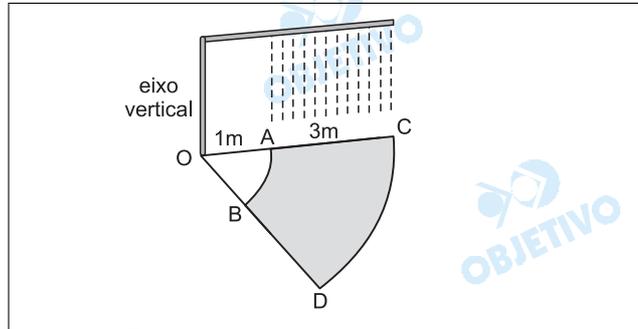
$$\begin{aligned} p &= p(2) + p(3) + p(5) + p(7) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

**Respostas:** a)  $p(3) = \frac{2}{15}$  e  $p(4) = \frac{1}{15}$

b)  $\frac{7}{15}$



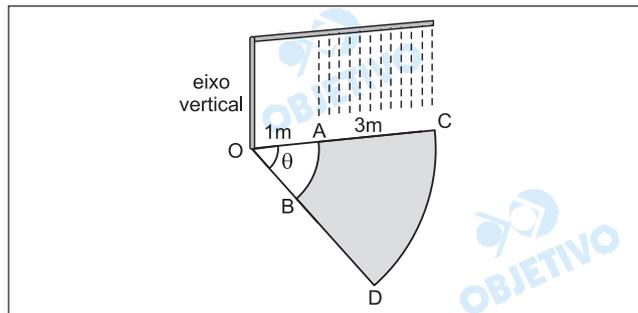
A figura mostra um sistema rotativo de irrigação sobre uma região plana, que gira em torno de um eixo vertical perpendicular à região. Se denotarmos a medida em radianos do ângulo  $A\hat{O}B$  por  $\theta$ , a área irrigada, representada pela parte cinza do setor circular, será uma função  $A$ , que dependerá do valor de  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



Se  $OA = 1 \text{ m}$  e  $AC = 3 \text{ m}$ , determine:

- a expressão matemática para a função  $A(\theta)$ .
- o valor de  $\theta$ , em graus, se a área irrigada for de  $8 \text{ m}^2$ .  
(Para facilitar os cálculos, use a aproximação  $\pi = 3$ .)

#### Resolução



- a) 1) A área  $S_{OAB}$  do setor circular  $OAB$  é tal que

$$S_{OAB} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\theta}{2}$$

- 2) A área  $S_{OCD}$  do setor circular  $OCD$  é tal que

$$S_{OCD} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\theta$$

- 3) A expressão matemática para a função que fornece a área irrigada, em metros quadrados, é:

$$A(\theta) = 8\theta - \frac{\theta}{2} = \frac{15\theta}{2}, \text{ com } \theta \text{ em radianos e}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

b)  $A(\theta) = 8 = \frac{15\theta}{2} \Rightarrow \theta = \frac{16}{15} \text{ rad.}$

Em graus, tem-se:

$$\theta = \frac{16}{15} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{16}{15} \cdot \frac{180^\circ}{3} = 64^\circ$$

**Respostas:** a)  $A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$

b)  $64^\circ$

Considere os números complexos  $w = 2i$  e  $z = (1 + i)$ .  
Determine:

- a)  $z^2$  e  $(w^2 \cdot \bar{z} + w)$ , onde  $\bar{z}$  indica o conjugado de  $z$ .  
b)  $|z|$  e  $|w|$ . Mostre que a seqüência  $(1, |z|, |w|, |zw|, |w^2|)$  é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

**Resolução**

Sendo  $w = 2i$  e  $z = 1 + i$  tem-se:

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 &= (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \\ w^2 \cdot \bar{z} + w &= (2i)^2 \cdot (1 - i) + (2i) = \\ &= -4 \cdot (1 - i) + 2i = -4 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ |w| &= \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ |zw| &= |z| \cdot |w| = 2\sqrt{2} \\ |w^2| &= |w|^2 = 4 \end{aligned}$$

A seqüência  $(1; |z|; |w|; |zw|; |w^2|)$  é equivalente a  $(1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4)$ . Trata-se de uma progressão geométrica de razão  $q = \sqrt{2}$ , pois  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2}$ ,

$\forall n \in \{1; 2; 3; 4\}$  e com  $a_n$  termo da seqüência.

**Respostas:** a)  $z^2 = 2i$  e  $w^2 \cdot \bar{z} + w = -4 + 6i$   
b)  $|z| = \sqrt{2}$ ,  $|w| = 2$ . A seqüência é  $(1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4)$  que é uma progressão geométrica de razão  $\sqrt{2}$ .

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Determine todos os números reais  $\lambda$  para os quais se tem  $\det(A - \lambda I) = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade de ordem 3.  
 b) Tomando  $\lambda = -2$ , dê todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

**Resolução**

a) Se  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

então  $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$

Portanto:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - \lambda) \cdot [(6 - \lambda)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = 0 \text{ ou } (6 - \lambda)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } 6 - \lambda = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 9$$

- b) Se  $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$  ou  $\lambda = 3$  ou  $\lambda = 9$  então, para  $\lambda = -2$ , temos:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim sendo, o sistema homogêneo

$$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y + 0z = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y + 0z = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

é determinado e a única solução é  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**Respostas:** a)  $\lambda = 2$  ou  $\lambda = 3$  ou  $\lambda = 9$

b)  $(0; 0; 0)$

Considere função dada por  $f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1$ .

- a) Quando  $m = -4$ , determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ .  
 b) Determine todos os valores reais de  $m$  para os quais a equação  $f(x) = m + 1$  não tem solução real  $x$ .

**Resolução**

$$f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3^{2x} \cdot 3 + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1$$

$$a) m = -4 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot (3^x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow 3^x = 1 \text{ ou } 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$b) f(x) = m + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1 = m + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) - m = 0$$

Fazendo  $3^x = y$  resulta a equação

$$3y^2 + m \cdot y - m = 0.$$

Essa equação não tem soluções reais se, e somente se, suas raízes  $y_1$  e  $y_2$  não são reais **ou** se ambas forem reais negativas.

I) As raízes  $y_1$  e  $y_2$  não são reais  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 12m < 0 \Leftrightarrow -12 < m < 0.$$

II) Para que as raízes  $y_1$  e  $y_2$  sejam ambas reais e

$$\text{negativas devemos ter } \Delta \geq 0, y_1 + y_2 = \frac{-m}{3} \leq 0$$

$$\text{e } y_1 \cdot y_2 = \frac{-m}{3} \geq 0 \text{ que se verifica apenas para}$$

$$m = 0.$$

Concluimos, então, que  $-12 < m \leq 0$ .

**Respostas:** a)  $x = -1$  ou  $x = 0$

b)  $-12 < m \leq 0$

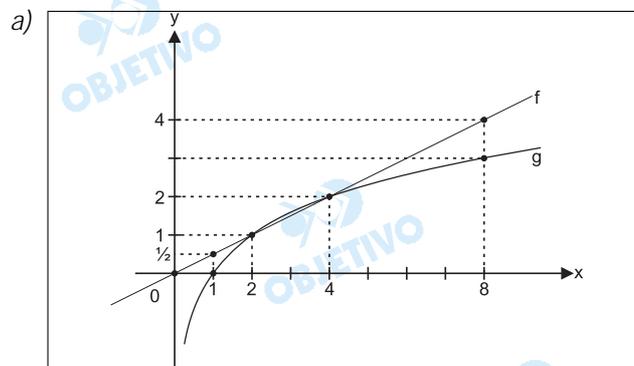
Considere as funções  $f(x) = \frac{x}{2}$  e  $g(x) = \log_2 x$ , para  $x > 0$ .

- a) Represente, num mesmo sistema de coordenadas retangulares, os gráficos das duas funções, colocando os pontos cujas abscissas são  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  e  $x = 8$ .
- b) Baseado na representação gráfica, dê o conjunto solução da inequação  $\frac{x}{2} < \log_2 x$ , e justifique por

que  $\frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$ .

### Resolução

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad g(x) = \log_2 x$$



$x$	1	2	4	8
$f(x)$	1/2	1	2	4

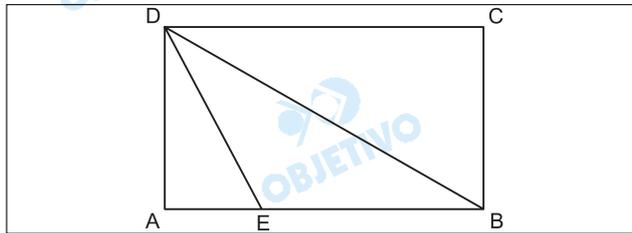
$x$	1	2	4	8
$g(x)$	0	1	2	3

b)  $\frac{x}{2} < \log_2 x \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Sendo:  $2 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$

7

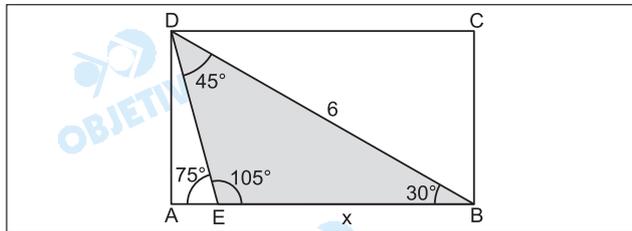
Na figura,  $ABCD$  é um retângulo,  $BD = 6$  cm, a medida do ângulo  $\hat{ABD}$  é  $\alpha = 30^\circ$ , a medida do ângulo  $\hat{AED}$  é  $\beta$  e  $x = BE$ . Determine:



- a) a área do triângulo  $BDE$ , em função de  $x$ .  
b) o valor de  $x$ , quando  $\beta = 75^\circ$ .

### Resolução

a)



$$S_{\triangle BDE} = \frac{x \cdot 6 \cdot \text{sen } 30^\circ}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \text{sen } 105^\circ &= \text{sen}(60^\circ + 45^\circ) = \\ &= \text{sen } 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Da Lei dos Senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{6}{\text{sen } 105^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

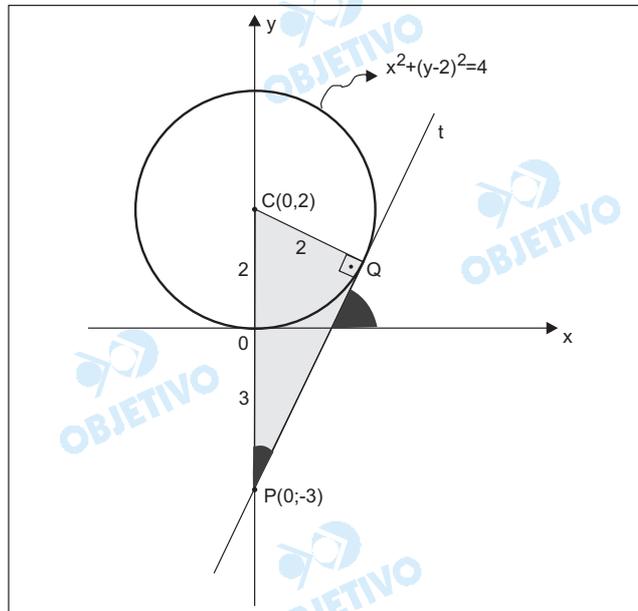
$$\Leftrightarrow x = 6(\sqrt{3} - 1)$$

**Respostas:** a)  $\frac{3x}{2}$  cm<sup>2</sup>    b)  $6(\sqrt{3} - 1)$  cm

Considere a circunferência  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$  e o ponto  $P(0, -3)$ .

- a) Encontre uma equação da reta que passe por  $P$  e tangencie a circunferência num ponto  $Q$  de abscissa positiva.  
 b) Determine as coordenadas do ponto  $Q$ .

**Resolução**



a)  $\Delta PQC$  é retângulo:

$$PQ^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow PQ = \sqrt{21}$$

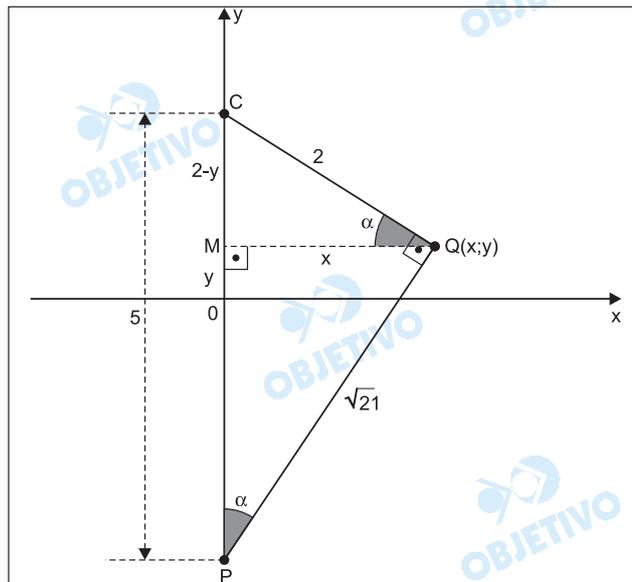
$$\text{Então } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow m_t = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{A equação da reta } t \text{ é: } y + 3 = \frac{\sqrt{21}}{2} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$$

b)



$\Delta PQC \sim \Delta QMC$

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{2-y}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

Então:  $Q\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}; \frac{6}{5}\right)$

**Respostas:** a)  $\sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$

b)  $Q\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}; \frac{6}{5}\right)$

Do solo, você observa um amigo numa roda gigante. A altura  $h$  em metros de seu amigo em relação ao solo é

$$\text{dada pela expressão } h(t) = 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right],$$

onde o tempo  $t$  é dado em segundos e a medida angular em radianos.

- Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ( $t = 0$ ).
- Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

**Resolução**

a) A altura, em metros, em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ( $t = 0$ ), é dada por:

$$\begin{aligned} h(0) &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (0 - 26) \right] = \\ &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left( -\frac{13\pi}{6} \right) = \\ &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) = 11,5 + 10 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \\ &= 11,5 - 5 = 6,5 \end{aligned}$$

b) Sendo  $h'$  e  $H$ , respectivamente, as alturas (em metros) mínima e máxima que seu amigo alcança,  $T$  o tempo (em segundos) gasto em uma volta completa, tem-se:

$$1^\circ) h' = 11,5 + 10 \cdot (-1) = 11,5 - 10 = 1,5$$

$$2^\circ) H = 11,5 + 10 \cdot (+1) = 11,5 + 10 = 21,5$$

3º)  $T$  é o período da função  $h(t)$

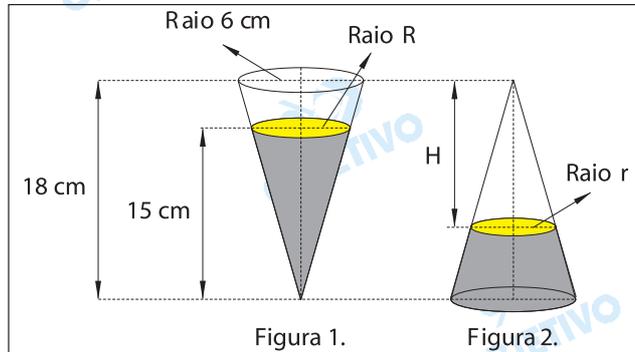
$$\text{Assim: } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = \frac{24\pi}{\pi} = 24$$

**Respostas:**

- 6,5 metros.
- altura mínima: 1,5 metro  
altura máxima: 21,5 metros  
período: 24 segundos

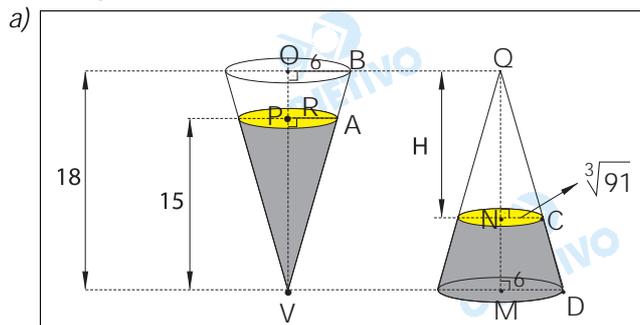
10

Um recipiente tampado, na forma de um cone circular reto de altura 18 cm e raio 6 cm, contém um líquido até a altura de 15 cm (figura 1). A seguir, a posição do recipiente é invertida (figura 2).



- Sejam  $R$  e  $r$  os raios mostrados nas figuras,
- determine  $R$  e o volume do líquido no cone em  $\text{cm}^3$  (figura 1), como múltiplo de  $\pi$ .
  - dado que  $r = \sqrt[3]{91}$ , determine a altura  $H$  da parte sem líquido do cone na figura 2. (Use a aproximação  $\sqrt[3]{91} \cong 9/2$ .)

**Resolução**



1º) Da semelhança dos triângulos retângulo PAV e OBV, tem-se:

$$\frac{R}{6} = \frac{15}{18} \Rightarrow R = 5$$

2º) Sendo  $V_L$  o volume, em centímetros cúbicos, do líquido no cone da figura 1, tem-se:

$$V_L = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 15 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi$$

b) Da semelhança dos triângulos retângulos NCQ e MDQ, tem-se:

$$\frac{H}{18} = \frac{\sqrt[3]{91}}{6} \Leftrightarrow H = 3 \cdot \sqrt[3]{91} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cong 3 \cdot \frac{9}{2} \Leftrightarrow H \cong \frac{27}{2}$$

**Respostas:**

a)  $R = 5 \text{ cm}$  e  $V_L = 125\pi \text{ cm}^3$

b)  $H \cong \frac{27}{2} \text{ cm}$

# FÍSICA

11

Um veículo está rodando à velocidade de 36 km/h numa estrada reta e horizontal, quando o motorista aciona o freio. Supondo que a velocidade do veículo se reduz uniformemente à razão de 4 m/s em cada segundo a partir do momento em que o freio foi acionado, determine

- o tempo decorrido entre o instante do acionamento do freio e o instante em que o veículo pára.
- a distância percorrida pelo veículo nesse intervalo de tempo.

**Resolução**

$$a) \quad 1) \quad V_0 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36}{3,6} \text{ (m/s)} = 10\text{m/s}$$

2) Sendo o movimento uniformemente variado, vem:

$$V = V_0 + \gamma t$$

$$0 = 10 - 4,0 \cdot T$$

$$T = 2,5\text{s}$$

b) Usando-se a equação da velocidade escalar média, vem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{V_0 + V}{2}$$

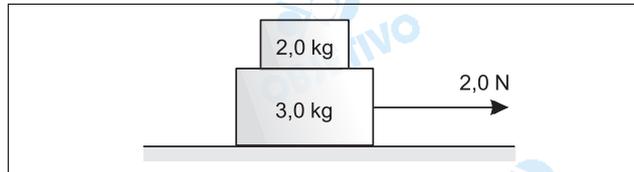
$$\frac{D}{2,5} = \frac{10 + 0}{2}$$

$$D = 12,5\text{m}$$

**Respostas:** a) 2,5s  
b) 12,5m

12

Um bloco de massa 2,0 kg repousa sobre outro de massa 3,0 kg, que pode deslizar sem atrito sobre uma superfície plana e horizontal. Quando uma força de intensidade 2,0 N, agindo na direção horizontal, é aplicada ao bloco inferior, como mostra a figura, o conjunto passa a se movimentar sem que o bloco superior escorregue sobre o inferior.



Nessas condições, determine

- a aceleração do conjunto.
- a intensidade da força de atrito entre os dois blocos.

**Resolução**

- Aplicando-se a 2ª Lei de Newton ao conjunto dos dois blocos, vem:

$$F = (m_A + m_B) a$$
$$2,0 = 5,0 \cdot a$$
$$a = 0,40 \text{ m/s}^2$$

- Isolando-se o bloco superior (A), vem:

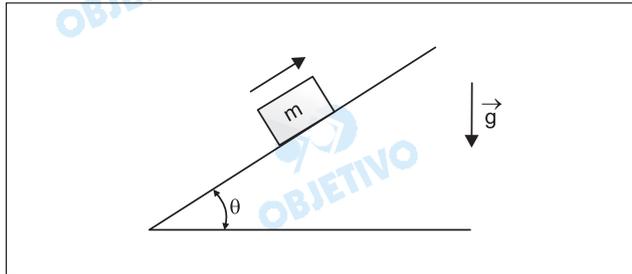
2ª Lei de Newton no bloco A

$$F_{atBA} = m_A a$$
$$F_{atBA} = 2,0 \cdot 0,40 \text{ (N)}$$
$$F_{atBA} = F_{atAB} = 0,80 \text{ N}$$

(ação e reação)

**Respostas:** a) a aceleração tem módulo  $0,40 \text{ m/s}^2$ , direção horizontal e sentido para a direita  
b)  $0,80 \text{ N}$

A figura mostra um bloco de massa  $m$  subindo uma rampa sem atrito, inclinada de um ângulo  $\theta$ , depois de ter sido lançado com uma certa velocidade inicial.

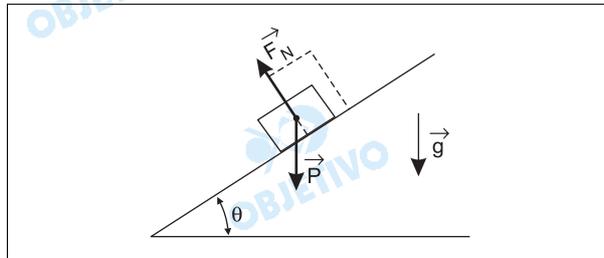


Desprezando a resistência do ar,

- faça um diagrama vetorial das forças que atuam no bloco e especifique a natureza de cada uma delas.
- determine o módulo da força resultante no bloco, em termos da massa  $m$ , da aceleração  $g$  da gravidade e do ângulo  $\theta$ . Dê a direção e o sentido dessa força.

#### Resolução

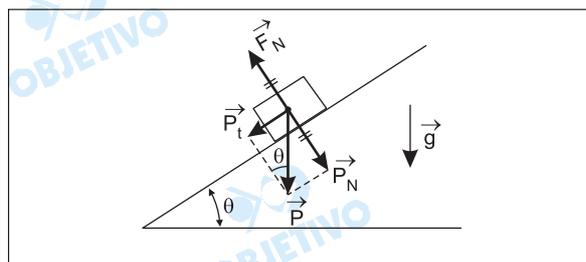
a)



$\vec{P}$ : peso do bloco, aplicado pelo planeta Terra, e é uma **força gravitacional**.

$\vec{F}_N$ : reação normal de apoio, aplicada pelo plano inclinado, e é uma **força eletromagnética**.

b)



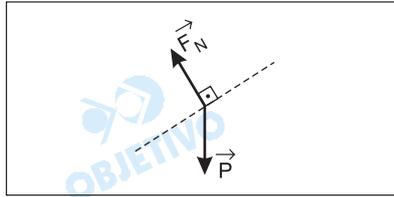
O peso é decomposto em uma parcela tangencial  $\vec{P}_t$  (paralela ao plano inclinado) e outra normal  $\vec{P}_N$  (perpendicular ao plano inclinado).

A componente normal  $\vec{P}_N$  é equilibrada pela reação normal de apoio  $\vec{F}_N$  e a força resultante no bloco é a componente tangencial do peso  $\vec{P}_t$ .

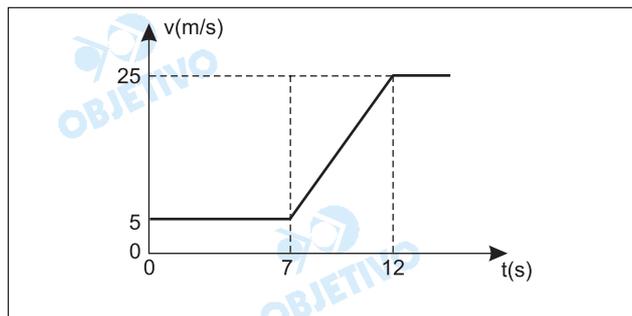
$$\text{Da figura: } \sin \theta = \frac{P_t}{P} \Rightarrow P_t = P \sin \theta$$

$$P_t = m g \sen \theta$$

**Respostas:** a) *Peso: natureza gravitacional*  
*Reação normal de apoio: natureza eletromagnética*



b) *A resultante tem módulo  $m g \sen \theta$ , direção paralela ao plano e sentido para baixo.*



O gráfico da figura representa a velocidade em função do tempo de um veículo de massa  $1,2 \times 10^3$  kg, ao se afastar de uma zona urbana.

- Determine a variação da energia cinética do veículo no intervalo de 0 a 12 segundos.
- Determine o trabalho da força resultante atuando no veículo em cada um dos seguintes intervalos: de 0 a 7 segundos e de 7 a 12 segundos.

#### Resolução

a) A variação da energia cinética é dada por:

$$\Delta E_{cin} = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m}{2} (V^2 - V_0^2)$$

Do gráfico dado, temos:  $V_0 = 5\text{ m/s}$  e  $V = 25\text{ m/s}$

Portanto:

$$\Delta E_{cin} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{2} [(25)^2 - (5)^2] \text{ (J)}$$

$$\Delta E_{cin} = 0,60 \cdot 10^3 (600) \text{ (J)}$$

$$\Delta E_{cin} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J}$$

- De 0 a 7s, a energia cinética é constante e o trabalho total realizado sobre o veículo é nulo.
  - De 7s a 12s, a variação de energia cinética vale  $3,6 \cdot 10^5 \text{ J}$  e o trabalho total realizado sobre o veículo vale  $3,6 \cdot 10^5 \text{ J}$ , de acordo com o teorema da energia cinética.

**Obs.:** Nesse caso, cumpre ressaltar o seguinte: se o veículo em questão for um carro, caminhão, trem ou equivalente, deslocando-se em um plano horizontal e desprezando-se o efeito do ar, a força resultante que acelera o veículo é a força de atrito aplicada pelo chão, que, supondo não haver derrapagem, é do tipo estática e o trabalho dela é nulo. Neste caso, a variação de energia cinética é proveniente de um trabalho interno das forças ligadas ao motor do veículo e o **trabalho da força resultante (atrito) é nulo**.

**Respostas:** a)  $\Delta E_{cin} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J}$

- o trabalho total é nulo de 0 a 7s
  - o trabalho total vale  $3,6 \cdot 10^5 \text{ J}$  de 7s a 12s (ver observação no texto)

**15**

Duas peças metálicas de massas iguais, uma de ferro e a outra de chumbo, inicialmente a  $100^{\circ}\text{C}$ , são colocadas em contacto térmico com um grande bloco de gelo a  $0^{\circ}\text{C}$ . Após o equilíbrio térmico das peças com o gelo, o calor fornecido pela peça de ferro deixa  $m_F$  gramas de gelo fundido, enquanto que o calor fornecido pela peça de chumbo deixa  $m_C$  gramas de gelo fundido. O calor específico do ferro vale aproximadamente  $0,45 \text{ J/g}\cdot^{\circ}\text{C}$  e o do chumbo,  $0,15 \text{ J/g}\cdot^{\circ}\text{C}$ .

- a) Qual o valor da razão  $m_F/m_C$ ?
- b) Sabendo que  $m_F = 90 \text{ g}$  e que o calor latente de fusão do gelo vale  $320 \text{ J/g}$ , qual o valor da massa  $M$  de cada peça metálica?

**Resolução**

- a) O equilíbrio térmico das peças metálicas com o bloco de gelo acontecerá a  $0^{\circ}\text{C}$ . Assim, o calor recebido para a fusão do gelo é igual ao calor fornecido pelas peças metálicas para esfriarem de  $100^{\circ}\text{C}$  a  $0^{\circ}\text{C}$ .

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{m_F \cdot L}{m_C \cdot L} = \frac{M c_{Fe} \cdot \Delta\theta}{M c_{Pb} \cdot \Delta\theta}$$
$$\frac{m_F}{m_C} = \frac{c_{Fe}}{c_{Pb}} = \frac{0,45}{0,15} = 3$$

$$\frac{m_F}{m_C} = 3$$

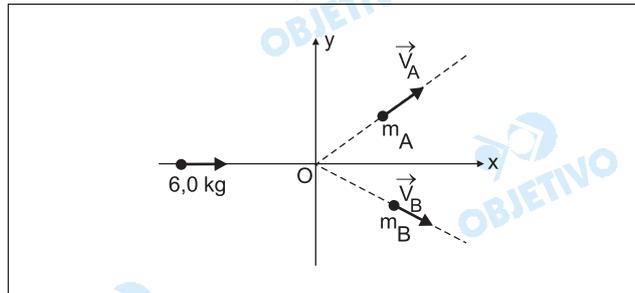
- b) **Cálculo de  $M$**

$$Q_F = m_F L = M \cdot c_{Fe} \cdot \Delta\theta$$
$$90 \cdot 320 = M \cdot 0,45 \cdot 100$$

$$M = 640\text{g}$$

- Respostas:** a) 3  
b) 640 g

Um corpo de 6,0 kg, deslocando-se com velocidade  $\vec{v}$  na direção e sentido de um eixo x e livre de forças externas, explode, separando-se em dois pedaços, A e B, de massas  $m_A$  e  $m_B$ , respectivamente. Após a explosão, A e B passam a se deslocar no plano xOy, afastando-se do ponto O com velocidades  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$ , respectivamente, segundo as direções representadas esquematicamente por linhas pontilhadas na figura.



- a) Sendo  $v$  o módulo de  $\vec{v}$  e sabendo que os módulos das componentes vetoriais de  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  na direção de x valem, respectivamente,  $v/2$  e  $2v$ , determine as massas  $m_A$  e  $m_B$ .
- b) Sendo  $v_{Ay}$  e  $v_{By}$ , respectivamente, os módulos das componentes de  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  na direção de y, determine a razão  $v_{Ay}/v_{By}$ .

#### Resolução

- a) *Explosão: sistema isolado de forças externas.*

**Conservação da quantidade de movimento (momento linear) na direção Ox:**

$$\vec{Q}_{x\text{final}} = \vec{Q}_{x\text{inicial}} \Rightarrow m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = mv$$

$$m_A \frac{v}{2} + m_B 2v = 6,0v \Rightarrow m_A + 4m_B = 12,0 \quad (1)$$

$$\text{Mas: } m_A + m_B = 6,0 \quad (2)$$

Fazendo-se (1) - (2), vem:

$$3m_B = 6,0$$

$$m_B = 2,0\text{kg}$$

$$\text{Logo: } m_A = 4,0\text{kg}$$

- b) **Conservação da quantidade de movimento (momento linear) na direção Oy.**

$$b) \vec{Q}_{y\text{final}} = \vec{Q}_{y\text{inicial}} \Rightarrow m_A v_{Ay} = m_B v_{By}$$

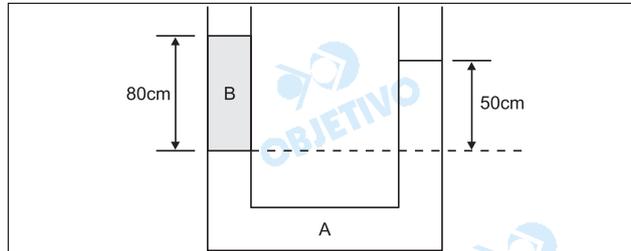
$$4,0 v_{Ay} = 2,0 v_{By} \Rightarrow \frac{v_{Ay}}{v_{By}} = \frac{1}{2}$$

**Respostas:** a)  $m_A = 4,0\text{kg}$

$$m_B = 2,0\text{kg}$$

$$b) \frac{V_{Ay}}{V_{By}} = \frac{1}{2}$$

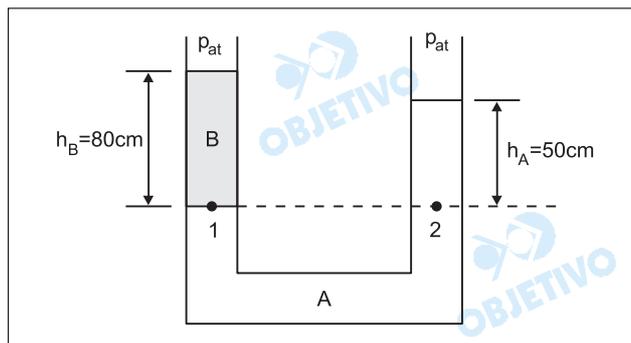
O tubo aberto em forma de U da figura contém dois líquidos não miscíveis, A e B, em equilíbrio. As alturas das colunas de A e B, medidas em relação à linha de separação dos dois líquidos, valem 50 cm e 80 cm, respectivamente.



- a) Sabendo que a massa específica de A é  $2,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , determine a massa específica do líquido B.
- b) Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e a pressão atmosférica igual a  $1,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , determine a pressão no interior do tubo na altura da linha de separação dos dois líquidos.

#### Resolução

a) As pressões nos pontos 1 e 2 são iguais:  $p_1 = p_2$ .



Sendo  $p_1 = p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B$  e  $p_2 = p_{at} + \mu_A \cdot g \cdot h_A$ ,

vem:  $p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B = p_{at} + \mu_A \cdot g \cdot h_A$

$$\mu_B \cdot h_B = \mu_A \cdot h_A$$

$$\mu_B \cdot 80 = 2,0 \cdot 10^3 \cdot 50$$

$$\mu_B = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

b) A pressão no interior do tubo na altura da linha de separação é  $p_1$ , que é igual a  $p_2$ .

De  $p_1 = p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B$ , vem:

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 + 1,25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,80 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

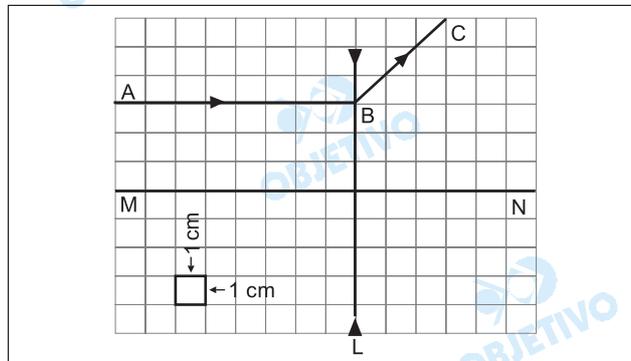
$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 + 0,1 \cdot 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$p_1 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

**Respostas:** a)  $1,25 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

b)  $1,1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

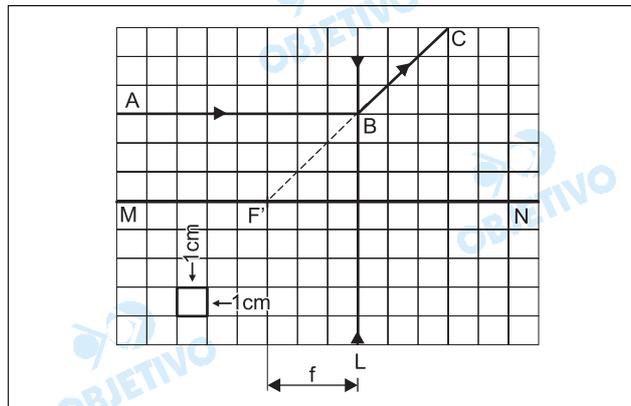
Na figura, MN representa o eixo principal de uma lente divergente L, AB o trajeto de um raio luminoso incidindo na lente, paralelamente ao seu eixo, e BC o correspondente raio refratado.



- A partir da figura, determine a distância focal da lente.
- Determine o tamanho e a posição da imagem de um objeto real de 3,0 cm de altura, colocado a 6,0 cm da lente, perpendicularmente ao seu eixo principal.

#### Resolução

- O raio incidente (AB), paralelo ao eixo óptico (MN) da lente, deve refratar-se alinhado com o foco imagem  $F'$ , conforme representamos abaixo.



Obedecendo-se à escala da figura, concluímos que:

$$|f| = 3,0\text{cm}$$

Como  $F'$  é um foco virtual, atribuímos sinal negativo a  $f$ .

- Equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$-\frac{1}{3,0} = \frac{1}{6,0} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = -\frac{1}{3,0} - \frac{1}{6,0}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{-2,0 - 1,0}{6,0} \Rightarrow p' = -2,0\text{cm}$$

A imagem virtual situa-se a 2,0cm da lente, do mesmo lado do objeto.

**Aumento linear transversal:**

$$\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{i}{3,0} = -\frac{(-2,0)}{6,0}$$

$$i = 1,0\text{cm}$$

A imagem é direita, com comprimento igual a 1,0cm.

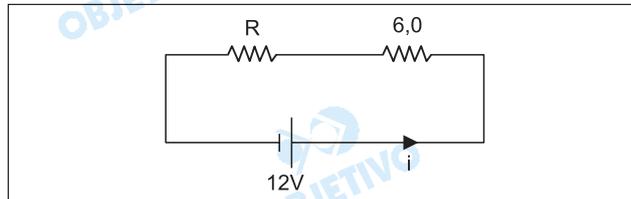
**Respostas:** a) -3,0cm

b) **Tamanho da imagem:** 1,0cm

**Posição da imagem:** a 2,0cm da lente, do mesmo lado do objeto.

**19**

Dois resistores, um de resistência  $6,0 \Omega$  e outro de resistência  $R$ , estão ligados a uma bateria de  $12 \text{ V}$  e resistência interna desprezível, como mostra a figura.



Sabendo que a potência total dissipada no circuito é  $6,0 \text{ W}$ , determine

- a corrente  $i$  que percorre o circuito.
- o valor da resistência  $R$ .

**Resolução**

- a) A potência elétrica total dissipada é a potência que o gerador fornece:

$$P_f = U \cdot i$$

$$6,0 = 12 \cdot i$$

$$i = 0,50 \text{ A}$$

- b) Os resistores de resistência  $R$  e  $6,0 \Omega$  estão em série e a associação está sob tensão  $U = 12 \text{ V}$ . Portanto:

$$U = (R + 6,0) \cdot i$$

$$12 = (R + 6,0) \cdot 0,50$$

$$R = 18 \Omega$$

- Respostas:** a)  $0,50 \text{ A}$   
b)  $18 \Omega$

# QUÍMICA

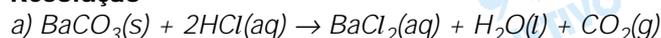
20

O sulfato de bário ( $\text{BaSO}_4$ ) é um sal muito pouco solúvel. Suspensões desse sal são comumente utilizadas como contraste em exames radiológicos do sistema digestivo. É importantíssimo que não ocorra dissolução de íons bário,  $\text{Ba}^{2+}$ , no estômago. Estes íons são extremamente tóxicos, podendo levar à morte. No primeiro semestre de 2003, vários pacientes brasileiros morreram após a ingestão de um produto que estava contaminado por carbonato de bário ( $\text{BaCO}_3$ ), em uma proporção de 13,1% em massa. O carbonato de bário reage com o ácido clorídrico ( $\text{HCl}$ ) presente no estômago humano, produzindo cloreto de bário ( $\text{BaCl}_2$ ) que, sendo solúvel, libera íons  $\text{Ba}^{2+}$  que podem passar para a corrente sanguínea, intoxicando o paciente.

- a) Escreva a equação química que representa a reação que ocorre no estômago quando o carbonato de bário é ingerido.
- b) Sabendo que o preparado é uma suspensão 100% em massa do sólido por volume da mesma e que cada dose é de 150 mL, calcule a massa de íons  $\text{Ba}^{2+}$  resultante da dissolução do carbonato de bário na ingestão de uma dose do preparado contaminado.

Massas molares, em  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ : bário = 137,3; carbono = 12,0; oxigênio = 16,0.

## Resolução



- b) Entende-se por uma suspensão 100% em massa do sólido por volume da mesma como aquela que apresenta 100g de sólidos em 100ml de suspensão.

$$\begin{array}{r} 100\text{g de sólidos} \text{ ----- } 100\text{ml de suspensão} \\ x \text{ ----- } 150\text{ml de suspensão} \\ x = 150\text{g de sólidos} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100\text{g de sólidos} \text{ ----- } 13,1\text{g de BaCO}_3 \text{ (13,1\%)} \\ 150\text{g de sólidos} \text{ ----- } y \\ y = 19,65\text{g de BaCO}_3 \end{array}$$

Massa molar do  $\text{BaCO}_3 =$

$$= (137,3 + 12,0 + 3 \times 16,0) \text{ g/mol} = 197,3 \text{ g/mol}$$

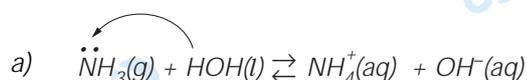
$$\begin{array}{r} 1 \text{ mol de BaCO}_3 \text{ ----- contém ----- } 1 \text{ mol de Ba}^{2+} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 197,3\text{g} \text{ ----- } 137,3 \text{ g} \\ 19,65\text{g} \text{ ----- } z \end{array}$$

$$z = 13,67\text{g de Ba}^{2+}$$

Uma das substâncias responsáveis pelo odor desagradável em banheiros muito utilizados é o gás amônia ( $\text{NH}_3$ ), resultante da decomposição da uréia presente na urina. Este gás é dissolvido na água e reage com ela, produzindo íons amônio ( $\text{NH}_4^+$ ) em solução.

- Escreva a equação química para a reação da amônia com a água e informe qual o efeito dessa reação sobre o pH da solução resultante.
- Estando disponíveis soluções aquosas de ácido clorídrico ( $\text{HCl}$ ), hidróxido de sódio ( $\text{NaOH}$ ) e cloreto de sódio ( $\text{NaCl}$ ), qual delas deveria ser utilizada para a diminuição imediata do odor da amônia? Utilize o Princípio de Le Chatelier para justificar sua resposta.

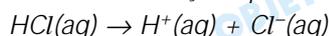
### Resolução



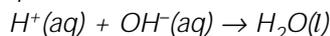
O meio resultante tornar-se-á básico devido à formação de íons  $\text{OH}^-$ . Como consequência, o pH aumenta.

- Por apresentar caráter básico, devemos utilizar uma substância ácida para neutralizá-la. Nesse caso, o  $\text{HCl}$ .

O  $\text{HCl}$  em solução apresenta íons  $\text{H}^+$ .



que neutralizam os íons  $\text{OH}^-$ ;



Ocorrerá diminuição da concentração dos íons  $\text{OH}^-$ , deslocando o equilíbrio da ionização da amônia "para a direita".

Em função disso,  $\text{NH}_3(\text{g})$  se dissolve em água, diminuindo o odor desagradável do gás amônia.

A adição de solução de  $\text{NaOH}$  desloca o equilíbrio para a esquerda intensificando o odor desagradável do gás amônia.

A adição de solução de  $\text{NaCl}$  não desloca o equilíbrio.

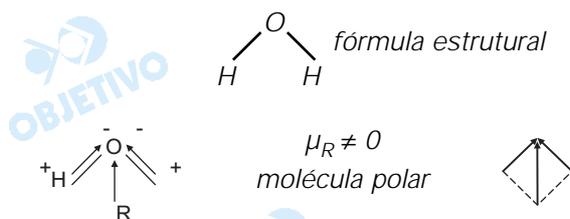
Os fornos de microondas são aparelhos que emitem radiações eletromagnéticas (as microondas) que aquecem a água e, conseqüentemente, os alimentos que a contêm. Isso ocorre porque as moléculas de água são polares, condição necessária para que a interação com esse tipo de radiação seja significativa. As eletronegatividades para alguns elementos são apresentadas na tabela a seguir.

elemento químico	eletronegatividade ( $\chi$ )
hidrogênio (H)	2,2
carbono (C)	2,6
oxigênio (O)	3,4

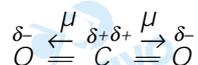
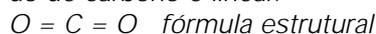
- a) Com base nessas informações, forneça a fórmula estrutural e indique o momento dipolar resultante para a molécula de água.
- b) Sabendo que praticamente não se observam variações na temperatura do dióxido de carbono quando este é exposto à ação das radiações denominadas microondas, forneça a estrutura da molécula de  $\text{CO}_2$ . Justifique sua resposta, considerando as diferenças nas eletronegatividades do carbono e do oxigênio.

**Resolução**

- a) *A ligação hidrogênio e oxigênio é polar, pois esses elementos têm diferentes eletronegatividades. Como a molécula da água é polar, a sua geometria molecular será angular.*



- b) *Como não se observa variações de temperatura quando o dióxido de carbono é exposto à ação das radiações eletromagnéticas (microondas), podemos concluir que a sua molécula é apolar. Como a ligação carbono e oxigênio é polar (diferentes eletronegatividades), a geometria molecular do dióxido de carbono é linear.*



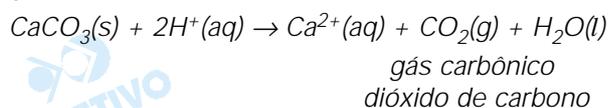
$$\leftarrow + \rightarrow = 0 \quad \mu_R = 0 \therefore \text{molécula apolar}$$

Uma solução pode ser caracterizada como ácida pela observação de sua reação com o calcário ( $\text{CaCO}_3$ ) ou com o zinco metálico ( $\text{Zn}^0$ ). Em ambas as situações observa-se, nas condições normais de temperatura e pressão, o desprendimento de gases.

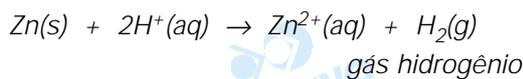
- a) Forneça o nome do gás formado pela reação de soluções ácidas com o calcário e o nome do outro gás formado pela reação dessas soluções com o zinco metálico.
- b) Das reações descritas, escreva a equação química que representa a reação de óxido-redução e identifique qual dos reagentes é o redutor.

### Resolução

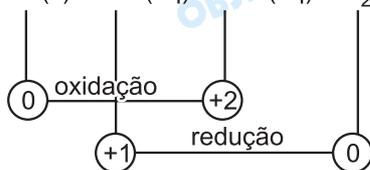
- a) A equação química entre  $\text{CaCO}_3$  e a solução ácida é:



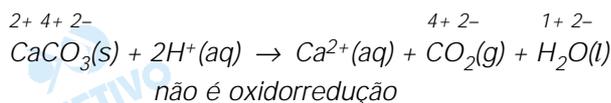
A equação química entre o metal zinco e a solução ácida é:



- b)  $\text{Zn}(s) + 2\text{H}^+(aq) \rightarrow \text{Zn}^{2+}(aq) + \text{H}_2(g)$



agente redutor:  $\text{Zn}(s)$



O gás butano ( $C_4H_{10}$ ) é o principal componente do gás de cozinha, o GLP (gás liquefeito de petróleo). A água fervente ( $H_2O$ , com temperatura igual a  $100^\circ C$ , no nível do mar) é utilizada para diversas finalidades: fazer café ou chá, cozinhar, entre outras. Considere que para o aumento de  $1^\circ C$  na temperatura de  $1\text{ g}$  de água são necessários  $4\text{ J}$ , que esse valor pode ser tomado como constante para a água líquida sob  $1$  atmosfera de pressão e que a densidade da água a  $25^\circ C$  é aproximadamente igual a  $1,0\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$ .

- a) Calcule a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de  $1\text{ L}$  de água, no nível do mar, de  $25^\circ C$  até o ponto de ebulição. Apresente seus cálculos.
- b) Dadas as entalpias-padrão de formação ( $\Delta H_f^\circ$ ) para o butano gasoso ( $-126\text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ), para o dióxido de carbono gasoso ( $-394\text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ), para a água líquida ( $-242\text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) e para o oxigênio gasoso ( $0\text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ), escreva a equação química para a combustão do butano e calcule a entalpia-padrão de combustão ( $\Delta H_c^\circ$ ) para esse composto.

#### Resolução

a) Cálculo da massa de  $1$  litro de água:

$$\begin{array}{rcl} 1\text{ g de } H_2O & \text{-----} & 1\text{ mL de } H_2O \\ x & \text{-----} & 1000\text{ mL de } H_2O \\ x = 1000\text{ g de } H_2O & & \end{array}$$

Cálculo da variação de temperatura ( $\Delta\theta$ )

$$\Delta\theta = 100^\circ C - 25^\circ C = 75^\circ C$$

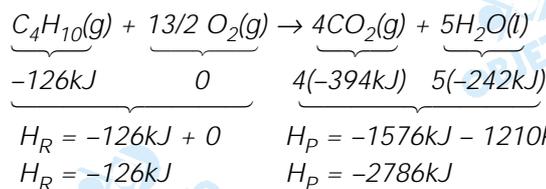
Cálculo da quantidade de calor:

$$\begin{array}{rcl} 1\text{ g de } H_2O & \text{-----} & 4\text{ J} \\ 1000\text{ g de } H_2O & \text{-----} & y \\ y = 4000\text{ J} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4000\text{ J} & \text{-----} & 1^\circ C \\ z & \text{-----} & 75^\circ C \end{array}$$

$$z = 300000\text{ J ou } 300\text{ kJ}$$

b) Equação de combustão do butano ( $C_4H_{10}$ ) e cálculo da entalpia-padrão ( $\Delta H_c^\circ$ )



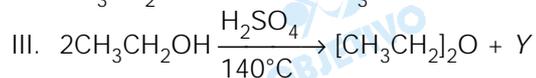
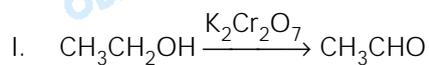
$$\Delta H_c^\circ = H_P - H_R$$

$$\Delta H_c^\circ = -2786 - (-126)$$

$$\Delta H_c^\circ = - 2660 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

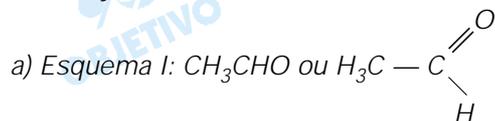
OBJETIVO

Os esquemas a seguir representam as condições em que ocorrem algumas reações com o etanol e que conduzem à formação de produtos distintos.



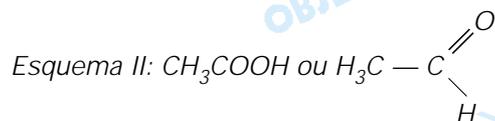
- a) Os esquemas I e II representam reações de oxidação do etanol. Para cada uma delas, escreva o nome do produto e o nome da respectiva função orgânica.
- b) Na reação III, são formados dois produtos, um orgânico e outro inorgânico, identificado por Y. Forneça os nomes desses dois compostos.

### Resolução



Nome: etanal ou acetaldeído (aldeído acético)

Função: aldeído



Nome: ácido etanóico ou ácido acético

Função: ácido carboxílico

b)

