

## 01

A hidroponia consiste no cultivo de plantas com as raízes mergulhadas em uma solução nutritiva que circula continuamente por um sistema hidráulico. Nessa solução, além da água, existem alguns elementos químicos que são necessários para as plantas em quantidades relativamente grandes e outros que são necessários em quantidades relativamente pequenas.

- Considerando que a planta obtém energia a partir dos produtos da fotossíntese que realiza, por que, então, é preciso uma solução nutritiva em suas raízes?
- Cite um dos elementos, além da água, que obrigatoriamente deve estar presente nessa solução nutritiva e que as plantas necessitam em quantidade relativamente grande. Explique qual sua participação na fisiologia da planta.

### Resolução

- A planta é um ser autótrofo, isto é, sintetiza todos os compostos orgânicos necessários à vida a partir de água, nutrientes minerais e dióxido de carbono.*
- Nitrogênio (N) – absorvido sob forma de nitratos e utilizado na síntese de proteínas, ácidos nucleicos e clorofilas.*  
*Magnésio (Mg) – absorvido sob forma de óxidos de magnésio, participando na síntese de clorofila.*  
*Fósforo (P) – absorvido sob forma de óxidos e relacionado com a produção de energia – síntese de AMP, ADP e ATP.*

## 02

As infecções hospitalares são frequentemente causadas por bactérias que passaram por um processo de seleção e se mostram, com isso, muito resistentes a antibióticos. A situação é agravada pelo fato de as bactérias apresentarem um crescimento populacional bastante rápido.

- Como a resistência a antibióticos se origina em bactérias de uma colônia que é sensível a eles?
- Explique de que maneira as características reprodutivas das bactérias contribuem para seu rápido crescimento populacional.

### Resolução

- Bactérias resistentes surgem casualmente devido a alterações espontâneas em seu material genético. Os antibióticos eliminam os microorganismos sensíveis, selecionando as formas sobre as quais não surte efeito.*

- O rápido crescimento populacional verificado em bactérias deve-se ao fato de que esses organismos unicelulares se multiplicam assexuadamente por **bipartição** (**cissiparidade**), quando vivem em condições favoráveis.*

## 03

Pela primeira vez na história evolutiva, o embrião é protegido por um envoltório que o protege e impede que desidrate. Ali, há também substâncias de reserva que o nutrirão até que saia do envoltório e passe a ter vida livre.

- Se essa frase for relacionada a um grupo animal, a que grupo ela se aplica com propriedade? Cite outra característica, reprodutiva ou do desenvolvimento do embrião, que também aparece nesse grupo pela primeira vez.
- Se essa frase for relacionada a um grupo vegetal, a que grupo ela se aplica com propriedade? Cite outra característica, reprodutiva ou do desenvolvimento do embrião, que também aparece nesse grupo pela primeira vez.

### Resolução

- Réptil.*
  - Ovo com casca calcária.*
  - Vitelo para a nutrição do embrião.*
  - Anexos embrionários: córion, alantóide e âmnio.*
- Gimnosperma.*
  - Formação do tubo polínico e independência de água para a fecundação.*
  - Produção de óvulos com integumentos protetores contra a desidratação.*
  - Desenvolvimento do endosperma primário que servirá para a nutrição do embrião.*

## 04

Um ser humano de aproximadamente 60 kg, em repouso, à temperatura de 20 °C, despende cerca de 1.500 kcal por dia.

Um jacaré, de mesma massa, nas mesmas condições, despende cerca de 60 kcal por dia.

- Cite um animal que tenha comportamento semelhante ao do jacaré e outro animal que tenha comportamento semelhante ao do ser humano no que diz respeito ao gasto de energia, mas que não sejam nem réptil nem mamífero.

- b) Explique por que o ser humano despende mais energia que o jacaré e se há alguma vantagem adaptativa nessa situação.

### Resolução

- a) *Sapo e gavião, respectivamente.*

*As aves (exemplo, o gavião) e mamíferos (exemplo, o homem) são endotermos. Os demais animais (exemplos, sapo e jacaré) são ectotermos.*

- b) *O ser humano despende grande quantidade de energia para manter a temperatura estável. A vantagem adaptativa é poder sobreviver, mantendo o metabolismo normal, mesmo em ambientes de temperatura desfavorável (exemplo, nos pólos).*

## 05

Louise Brown nasceu em julho de 1978, em Londres, e foi o primeiro bebê de proveta, por fecundação artificial *in vitro*. A ovelha Dolly nasceu em 5 de julho de 1996, na Escócia, e foi o primeiro mamífero clonado a partir do núcleo da célula de uma ovelha doadora.

- a) Qual a probabilidade de Louise ter o genoma mitocondrial do pai? Explique.  
 b) O genoma nuclear do pai da ovelha doadora fará parte do genoma nuclear de Dolly? Explique.

### Resolução

- a) *A probabilidade de Louise ter o genoma mitocondrial do pai é zero. Durante a fecundação, somente o núcleo do espermatozóide penetra no óvulo, portanto as mitocôndrias são herdadas apenas da mãe.*

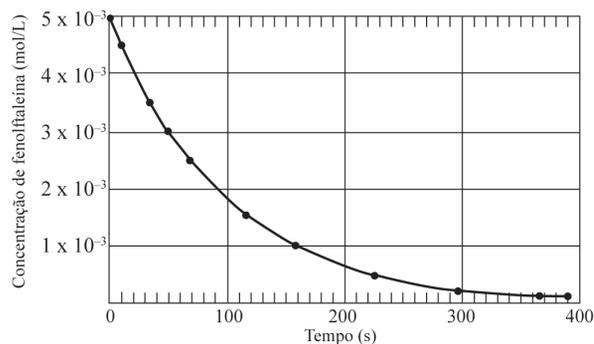
- b) *Sim. A ovelha Dolly foi clonada utilizando-se o núcleo de uma célula somática da ovelha doadora. Essa célula, originada a partir de um zigoto, portava 50% de seu genoma de origem paterna e 50% de origem materna.*

## QUÍMICA

## 06

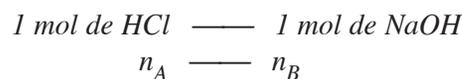
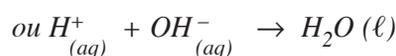
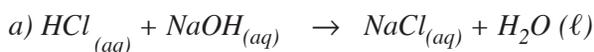
Para neutralizar 10,0 mL de uma solução de ácido clorídrico, foram gastos 14,5 mL de solução de hidróxido de sódio 0,120 mol/L. Nesta titulação ácido-base foi utilizada fenolftaleína como indicador do ponto final da reação. A fenolftaleína é incolor no meio ácido, mas torna-se rosa na presença de base em excesso. Após o final da reação, percebe-se que a solução gradativamente fica incolor à medida que a fenolftaleína reage com excesso de NaOH. Neste experimento, foi construído um

gráfico que representa a concentração de fenolftaleína em função do tempo.



- a) Escreva a equação da reação de neutralização e calcule a concentração, em mol/L, da solução de HCl.  
 b) Calcule a velocidade média de reação de decomposição da fenolftaleína durante o intervalo de tempo de 50 segundos iniciais de reação. Explique por que a velocidade de reação não é a mesma durante os diferentes intervalos de tempo.

### Resolução



$$\text{Logo: } n_A = n_B$$

$$\mathcal{M}_A V_A = \mathcal{M}_B V_B$$

$$\mathcal{M}_A \cdot 10,0 \text{ mL} = 0,120 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 14,5 \text{ mL}$$

$$\mathcal{M}_A = 0,174 \text{ mol/L}$$

$$b) v_{\text{média}} = \frac{|\Delta \mathcal{M}|}{\Delta t} =$$

$$= \frac{|3 \times 10^{-3} \text{ mol/L} - 5 \times 10^{-3} \text{ mol/L}|}{50\text{s} - 0\text{s}}$$

$$v_{\text{média}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ mol/L} \cdot \text{s}$$

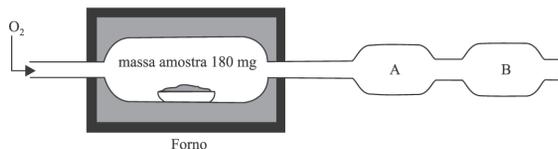
A velocidade da reação é dada por uma fórmula do tipo:

$$v = k [\text{fenolftaleína}]^x$$

À medida que a concentração do reagente (fenolftaleína) diminui, a velocidade da reação decresce.

## 07

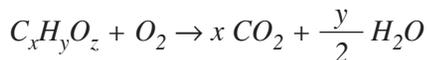
A figura apresenta um esquema de equipamento utilizado para determinação de carbono e hidrogênio em uma determinada amostra de um composto orgânico (constituído por C, H e O) com massa molar 90 g/mol. A amostra no forno sofre combustão completa com excesso de gás oxigênio. No equipamento, o interior das regiões A e B contém substâncias sólidas para reter por completo, respectivamente, a água e o gás carbônico produzidos na combustão.



- a) Determine a fórmula molecular do composto orgânico analisado, sabendo-se que as massas de água e gás carbônico produzidas foram respectivamente 36 mg e 176 mg.
- b) O compartimento B contém a substância hidróxido de sódio. Escreva a equação da reação que lá ocorre, sabendo-se que é classificada como reação de síntese.

### Resolução

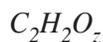
a) Composto orgânico:  $C_xH_yO_z$



$$90g \quad \quad \quad x \cdot 44g \quad \quad \quad \frac{y}{2} \cdot 18g$$

$$180mg \quad \quad \quad 176mg \quad \quad \quad 36mg$$

$$x = 2, \quad y = 2$$

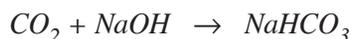


$$90g/mol = 2 \cdot 12g/mol + 2 \cdot 1g/mol + z \cdot 16g/mol$$

$$z = 4$$

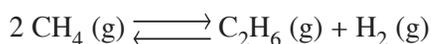


b) A equação química de síntese (mais de um reagente e um único produto) entre  $CO_2$  e  $NaOH$  é:



## 08

Sob condições experimentais adequadas, o gás metano pode ser convertido nos gases etano e hidrogênio:



Para essa reação, a dependência da constante de equilíbrio com a temperatura é dada na tabela.

Temperatura (K)	constante de equilíbrio
298	$9 \times 10^{-13}$
400	$8 \times 10^{-10}$
600	$6 \times 10^{-7}$

- a) A reação de conversão do gás metano para etano é uma reação endotérmica? No sistema em equilíbrio, a concentração de gás metano pode ser aumentada se houver um aumento de temperatura? Justifique suas respostas.
- b) No sistema em equilíbrio, qual deve ser o efeito na concentração do gás hidrogênio quando, separadamente, se adiciona um catalisador e quando há um aumento de pressão? Justifique suas respostas.

### Resolução

$$a) K_c = \frac{[C_2H_6] \cdot [H_2]}{[CH_4]^2}$$

*Aumentando-se a temperatura, a constante de equilíbrio aumenta. Logo, aumenta a concentração dos produtos. O equilíbrio foi deslocado para a direita. De acordo com o princípio de Le Chatelier, um aumento de temperatura desloca o equilíbrio no sentido da reação endotérmica. Portanto, a reação de formação dos produtos é endotérmica.*

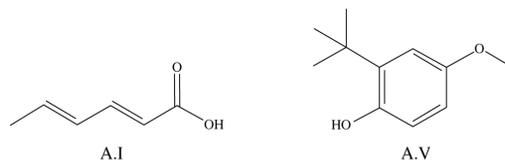
*A concentração de gás metano diminui com o aumento da temperatura, pois o equilíbrio é deslocado no sentido de formação do etano.*

- b) *A adição de um catalisador não desloca o equilíbrio, portanto a concentração do hidrogênio permanece constante.*

*Como não há variação na quantidade de matéria (2 mols de reagentes e 2 mols de produtos), não há deslocamento do equilíbrio por aumento de pressão. Porém, o volume diminui, fazendo aumentar as concentrações de todos os participantes do equilíbrio.*

## 9

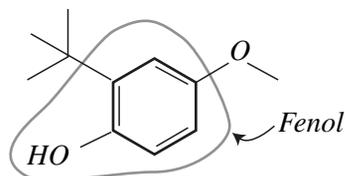
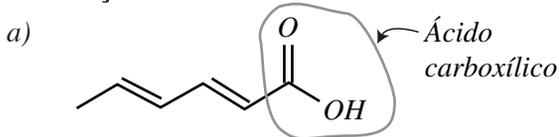
Usam-se aditivos para melhorar o aspecto e a preservação dos alimentos industrializados. O aditivo A.I é um agente antimicrobiano utilizado em alimentos como suco de frutas cítricas. O aditivo A.V é um agente antioxidante utilizado em alimentos como as margarinas.



a) Dê os nomes dos grupos funcionais que contêm átomos de H encontrados nas duas estruturas. Qual dos dois aditivos pode apresentar maior solubilidade num solvente apolar? Justifique.

b) Dentre os aditivos, qual seria o mais indicado para ser utilizado em alimentos de baixos valores de pH? Justifique. Dê o nome do aditivo A.I.

### Resolução



O aditivo A.V possui menor polaridade, uma vez que a relação entre átomos de carbono e átomos de oxigênio é maior. Dessa forma, esse aditivo é mais solúvel em um solvente apolar. Isto é confirmado no texto, pois esse aditivo é utilizado em margarinas que são praticamente apolares. Lembre-se de que solvente apolar dissolve substância apolar.

b) O aditivo A. I, por apresentar maior caráter ácido, é mais indicado para ser utilizado em alimentos de baixos valores de pH (que são mais ácidos). Isso é confirmado no texto, pois esse aditivo é usado em sucos de frutas cítricas que têm baixo pH. Seu nome oficial é ácido 2,4-hexadienóico ou ácido hexa-2,4-dienóico.

## 10

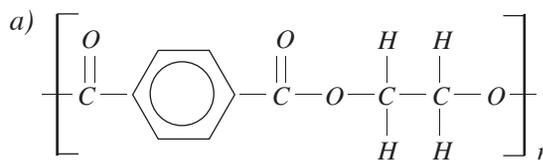
As garrafas PET são um dos problemas de poluição citados por ambientalistas; sejam depositadas em aterros sanitários ou até mesmo jogadas indiscriminadamente em terrenos baldios e cursos d'água, esse material leva cerca de 500 anos para se degradar. A reciclagem tem sido uma solução válida, embora ainda não atinja nem metade das garrafas PET produzidas no país. Pesquisadores brasileiros estudam o desenvolvimento de um plástico obtido a partir das garrafas PET, que se degrada em apenas 45 dias. O segredo para o desenvolvimento do novo polímero foi utilizar em sua síntese um outro tipo de plástico, no caso um poliéster alifático, para acelerar o processo de degradação. O polímero PET, poli(tereftalato de etileno), é obtido a partir da reação do ácido tereftálico com etilenoglicol na presença de catalisador e em condições de temperatura e pressão adequadas ao processo.



a) Dê a fórmula estrutural do PET. Em relação à estrutura química dos polímeros citados, o que pode estar associado quanto à biodegradabilidade dos mesmos?

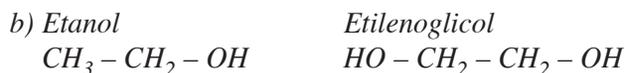
b) O etanol é semelhante ao etilenoglicol. Dentre esses dois álcoois, qual deve apresentar menor pressão de vapor e qual deve apresentar menor temperatura de ebulição? Justifique.

### Resolução



PET

A biodegradabilidade está relacionada ao tipo de cadeia. Pelo texto, podemos concluir que o plástico biodegradável possui cadeia alifática e o PET, que possui cadeia aromática, não é biodegradável.

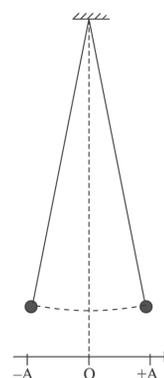


Por estabelecer maior quantidade de ligações de hidrogênio entre suas moléculas, podemos concluir que o etilenoglicol possui força intermolecular mais intensa; portanto, possui menor pressão de vapor. O etanol, por possuir maior pressão ou vapor, possui menor ponto de ebulição.

## FÍSICA

## 11

Um estudante faz o estudo experimental de um movimento harmônico simples (MHS) com um cronômetro e um pêndulo simples como o da figura, adotando o referencial nela representado.



Ele desloca o pêndulo para a posição  $+A$  e o abandona quando cronometra o instante  $t = 0$ . Na vigésima passagem do pêndulo por essa posição, o cronômetro marca  $t = 30$  s.

- a) Determine o período ( $T$ ) e a frequência ( $f$ ) do movimento desse pêndulo.
- b) Esboce no caderno de respostas o gráfico  $x$  (posição)  $\times t$  (tempo) desse movimento, dos instantes  $t = 0$  a  $t = 3,0$  s; considere desprezível a influência de forças resistivas.

### Resolução

- a) No intervalo de tempo de 30s citado no enunciado ocorrem 20 oscilações completas do pêndulo simples. Logo:

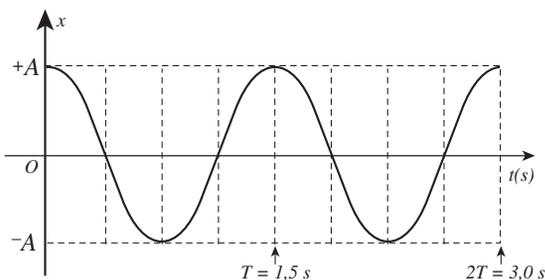
$$20 T = \Delta t \Rightarrow 20 T = 30$$

$$T = \frac{3}{2} \text{ s} \Rightarrow \boxed{T = 1,5 \text{ s}}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\frac{3}{2}} \text{ (Hz)} \Rightarrow f = \frac{2}{3} \text{ Hz}$$

$$\text{ou } \boxed{f \cong 0,67 \text{ Hz}}$$

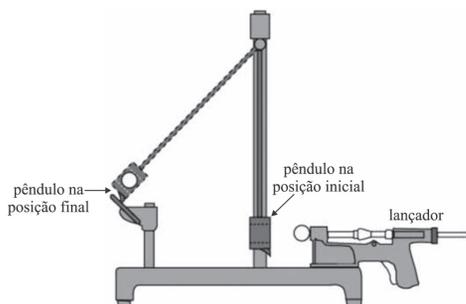
- b) Observando-se que em  $t = 0$ ,  $x = +A$ , temos o gráfico senoidal a seguir:



- Respostas: a)  $T = 1,5$  s;  $f \cong 0,67$  Hz  
b) Ver gráfico

## 12

A figura representa um pêndulo balístico usado em laboratórios didáticos.



A esfera disparada pelo lançador se encaixa em uma cavidade do bloco preso à haste – em consequência ambos sobem até ficarem presos por atrito em uma pequena rampa, o que permite medir o desnível vertical  $h$  do centro de massa do pêndulo (conjunto bloco-esfera) em relação ao seu nível inicial. Um aluno trabalha com um equipamento como esse, em que a massa da esfera é  $m_E = 10$  g, a massa do bloco é  $m_B = 190$  g e a massa da haste pode ser considerada desprezível. Em um ensaio experimental, o centro de massa do conjunto bloco-esfera sobe  $h = 10$  cm.

- a) Qual a energia potencial gravitacional adquirida pelo conjunto bloco-esfera em relação ao nível inicial?
- b) Qual a velocidade da esfera ao atingir o bloco?

Suponha que a energia mecânica do conjunto bloco-esfera se conserve durante o seu movimento e adote  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

### Resolução

a)  $E_{pot} = (m_E + m_B) g h$

$$E_{pot} = (10 + 190) \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ (J)}$$

$$E_{pot} = 200 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\boxed{E_{pot} = 0,20 \text{ J} = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ J}}$$

- b) 1) No ato da colisão entre a esfera e o bloco, o sistema é isolado e haverá conservação da quantidade de movimento total do sistema.

$$Q_{após} = Q_{antes}$$

$$(m_B + m_E) V_I = m_E V_0$$

$$\boxed{V_I = \frac{m_E V_0}{m_B + m_E}} \quad (1)$$

- 2) Após a colisão, durante a subida do pêndulo, a energia mecânica permanece constante. Vamos desprezar o trabalho da força de atrito na rampa.

$$\boxed{E_f = E_i}$$

$$(m_B + m_E) g h = (m_B + m_E) \frac{V_I^2}{2}$$

$$V_I^2 = 2 g h$$

$$\boxed{V_I = \sqrt{2gh}} \quad (2)$$

Comparando-se (1) e (2) vem:

$$\frac{m_E V_0}{m_B + m_E} = \sqrt{2gh}$$

$$V_0 = \frac{m_B + m_E}{m_E} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$V_0 = \frac{200}{10} \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,10} \text{ (m/s)}$$

$$V_0 = 20\sqrt{2} \text{ m/s} \cong 28 \text{ m/s}$$

Resposta: a) 0,20 J ou  $2,0 \cdot 10^{-1}$  J

b)  $20\sqrt{2}$  m/s ou aproximadamente 28 m/s

## 13

Em uma atividade experimental, um estudante pendura um pequeno bloco metálico em um dinamômetro. Em seguida, ele imerge inteiramente o bloco pendurado em um determinado líquido contido em uma proveta; o bloco não encosta nem no fundo nem nas paredes da proveta. Por causa dessa imersão, o nível do líquido na proveta sobe  $10 \text{ cm}^3$  e a marcação do dinamômetro se reduz em  $0,075 \text{ N}$ .

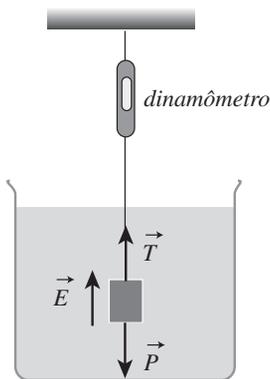
a) Represente no caderno de respostas o bloco imerso no líquido e as forças exercidas sobre ele, nomeando-as.

b) Determine a densidade do líquido.

Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Resolução

a)



$P$  = força gravitacional que a Terra aplica no bloco

$E$  = força de empuxo que o líquido aplica no bloco

$T$  = força de tração que o fio aplica no bloco

b) 1) O volume do bloco correspondente ao aumento do nível do líquido.

$$V = 10 \text{ cm}^3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

2)  $F_1 = P$  (indicação inicial do dinamômetro)

$$F_2 = P - E \text{ (indicação final do dinamômetro)}$$

$$\Delta F = F_1 - F_2 = E$$

$$\Delta F = \mu_L V g$$

$$0,075 = \mu_L \cdot 1,0 \cdot 10^{-5} \cdot 10$$

$$\mu_L = 0,075 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$$

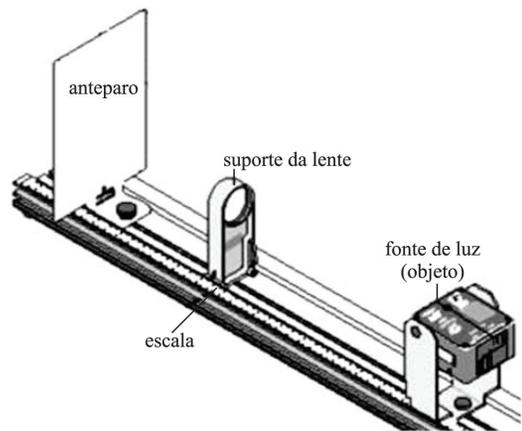
$$\mu_L = 7,5 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$$

Respostas: a) ver figura

b)  $7,5 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$

## 14

A figura representa um banco óptico didático: coloca-se uma lente no suporte e varia-se a sua posição até que se forme no anteparo uma imagem nítida da fonte (em geral uma seta luminosa vertical). As abscissas do anteparo, da lente e do objeto são medidas na escala, que tem uma origem única.

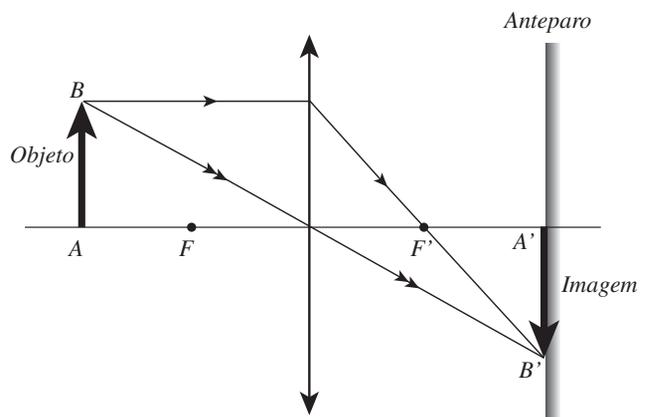


a) Represente graficamente no caderno de respostas (sem valores numéricos) a situação correspondente ao esquema da figura, em que apareçam: o objeto (seta luminosa da fonte); a lente e seus dois focos; a imagem e pelo menos dois raios de luz que emergem do objeto, atravessem a lente e formem a imagem no anteparo.

b) Nessa condição, determine a distância focal da lente, sendo dadas as posições dos seguintes componentes, medidas na escala do banco óptico: anteparo, na abscissa 15 cm; suporte da lente, na abscissa 35 cm; fonte, na abscissa 95 cm.

### Resolução

a) Como a imagem está projetada no anteparo, ela é real. O objeto também é real. Concluímos que se trata de uma lente convergente.



b) Pelas abscissas fornecidas obtemos:

$$p' = (35 - 15) \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$p = (95 - 35) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow f = \frac{p \cdot p'}{p + p'}$$

$$f = \frac{20 \cdot 60}{20 + 60} (\text{cm})$$

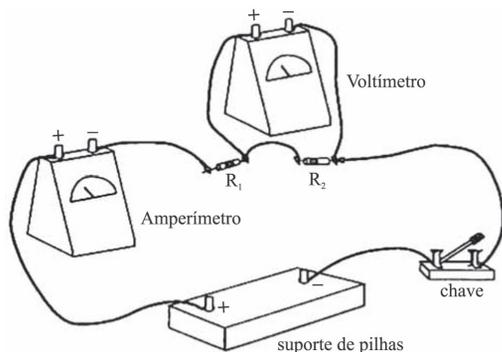
$$f = + 15 \text{ cm}$$

Respostas: a) Ver figura

b) 15 cm

**15**

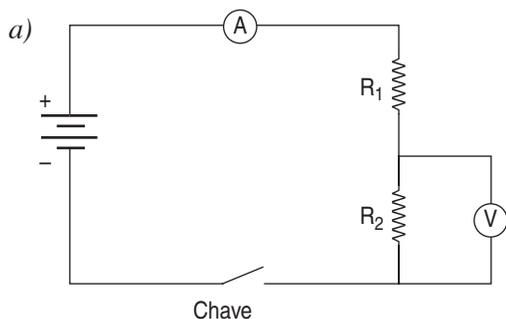
A montagem experimental representada na figura se destina ao estudo de um circuito elétrico simples.



a) Usando símbolos convencionais para cada componente, represente esquematicamente esse circuito no caderno de respostas.

b) Sabendo que  $R_1 = 100 \, \Omega$  e  $R_2 = 200 \, \Omega$  e que no suporte de pilhas são colocadas duas pilhas em série, de força eletromotriz 1,5 V cada, determine as leituras no amperímetro e no voltímetro quando a chave é fechada. (Admita que as resistências internas das pilhas, dos fios de ligação e dos medidores não interferem nessas leituras.)

**Resolução**



b) Com a chave fechada, a intensidade da corrente que circula no circuito é dada pela lei de Pouillet:

$$i = \frac{(2E)}{R_1 + R_2} \Rightarrow i = \frac{2 \cdot 1,5}{100 + 200} (\text{A})$$

$$i = 0,010 \text{ A} \Rightarrow i = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

O voltímetro está em paralelo com  $R_2$  e lê a ddp nesse resistor.

$$U = R_2 \cdot i \Rightarrow U = 200 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} (\text{V})$$

$$U = 2,0 \text{ V}$$

Respostas: a) ver figura;

b) no amperímetro:  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}$  ou 10 mA,  
no voltímetro: 2,0 V

## MATEMÁTICA

**16**

Dado  $x > 0$ , considere o retângulo de base 4 cm e altura  $x$  cm.

Seja  $y$ , em centímetros quadrados, a área desse retângulo menos a área de um quadrado de lado  $x/2$  cm.

a) Obtenha os valores de  $x$  para os quais  $y > 0$ .

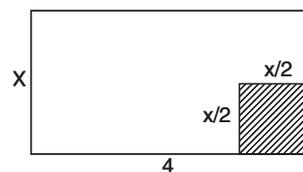
b) Obtenha o valor de  $x$  para o qual  $y$  assume o maior valor possível, e dê o valor máximo de  $y$ .

**Resolução**

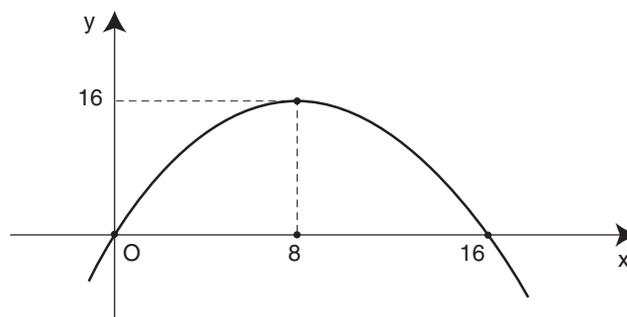
De acordo com o enunciado, temos:

$$y = 4x - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot x \cdot (x - 16)$$



O gráfico dessa função é do tipo



O vértice é o ponto (8; 16), pois

$$x_v = \frac{0 + 16}{2} = 8 \quad e \quad y_v = -\frac{1}{4} \cdot 8 \cdot (8 - 16) = 16$$

Assim sendo:

a)  $y > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 16$

b) Para  $x = 8$  o  $y$  assume o valor máximo 16.

Respostas: a)  $0 < x < 16$

b)  $x = 8; y = 16$

## 17

Considere a função  $y = f(x) = 1 + \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ , definida para todo  $x$  real.

- a) Dê o período e o conjunto imagem da função  $f$ .  
 b) Obtenha todos os valores de  $x$  no intervalo  $[0, 1]$ , tais que  $y = 1$ .

**Resolução**

$$f(x) = 1 + \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \cos(2\pi x)$$

Assim sendo:

a) O período de  $f$  é 1 e o conjunto-imagem é  $[0; 2]$ , pois

$$-1 \leq -\cos(2\pi x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos(2\pi x) \leq 2$$

b) Se  $0 \leq x \leq 1$  e  $y = 1$ , então:

$$1 - \cos(2\pi x) = 1 \Leftrightarrow \cos(2\pi x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}$$

Respostas: a) 1;  $[0; 2]$

b)  $\left\{\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right\}$

## 18

Suponha que Moacir esqueceu o número do telefone de seu amigo. Ele tem apenas duas fichas, suficientes para dois telefonemas.

- a) Se Moacir só esqueceu os dois últimos dígitos, mas sabe que a soma desses dois dígitos é 15, encontre o número de possibilidades para os dois últimos dígitos.  
 b) Se Moacir só esqueceu o último dígito e decide escolher um dígito ao acaso, encontre a probabilidade de acertar o número do telefone, com as duas tentativas.

**Resolução**

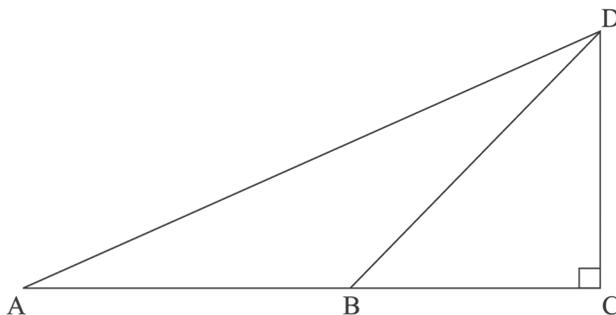
a) Se a soma dos dois últimos dígitos é 15, as possibilidades para cada um desses dígitos são 6, 7, 8 e 9. Os possíveis números formados por dois dígitos são 69, 78, 87, e 96, num total de quatro.

b) Admitindo-se que esse item independa do item a, a probabilidade de errar nas duas tentativas é  $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{5}$ . A probabilidade de acertar o número do telefone de seu amigo é  $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ .

Respostas: a) 4      b)  $\frac{1}{5}$

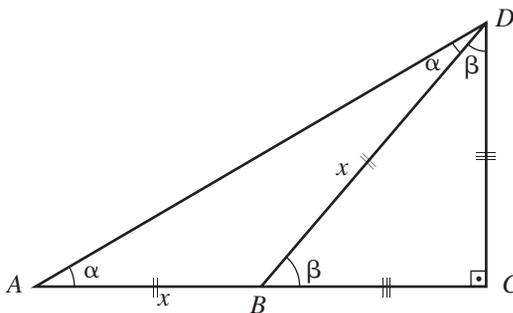
## 19

Na figura, os triângulos ABD e BCD são isósceles. O triângulo BCD é retângulo, com o ângulo C reto, e A, B, C estão alinhados.



- a) Dê a medida do ângulo  $\widehat{BAD}$  em graus.  
 b) Se  $BD = x$ , obtenha a área do triângulo ABD em função de  $x$ .

**Resolução**



- a) O triângulo  $BCD$  é isósceles de base  $\overline{BD}$ . Os ângulos  $D\hat{B}C$  e  $B\hat{D}C$  são de medidas iguais a  $\beta$  tal que  $\beta + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \beta = 45^\circ$   
 O triângulo  $ABD$  é isósceles de base  $\overline{AD}$ . Os ângulos  $B\hat{A}D$  e  $A\hat{D}B$  são de medidas iguais a  $\alpha$  tal que  $\alpha + \alpha = \beta \Leftrightarrow 2\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \alpha = 22,5^\circ$

- b) No triângulo retângulo  $BCD$

$$\text{temos } BC^2 + CD^2 = BD^2 \Leftrightarrow 2BC^2 = x^2 \Leftrightarrow BC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{A área do triângulo } ABD \text{ é } \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{2}}{4},$$

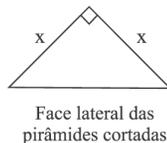
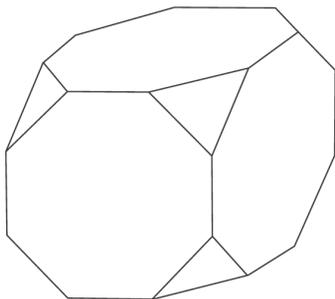
$$\text{pois sua altura } BC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Respostas: a)  $22,5^\circ$

$$b) \frac{x^2\sqrt{2}}{4} \text{ unidades de área.}$$

## 20

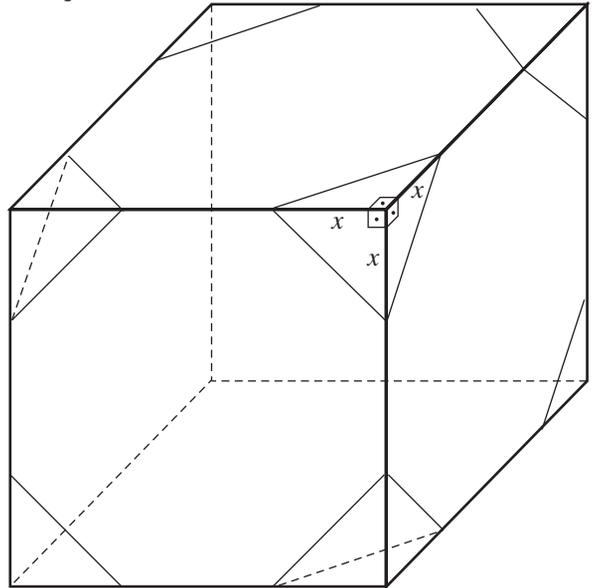
Um poliedro é construído a partir de um cubo de aresta  $a > 0$ , cortando-se em cada um de seus cantos uma pirâmide regular de base triangular equilateral (os três lados da base da pirâmide são iguais). Denote por  $x$ ,  $0 < x \leq a/2$ , a aresta lateral das pirâmides cortadas.



- a) Dê o número de faces do poliedro construído.  
 b) Obtenha o valor de  $x$ ,  $0 < x \leq a/2$ , para o qual o volume do poliedro construído fique igual a cinco

sextos do volume do cubo original. A altura de cada pirâmide cortada, relativa à base equilateral, é  $x/\sqrt{3}$ .

### Resolução



- a) As faces do poliedro construído são os seis octógonos remanescentes das faces do cubo e os oito triângulos equiláteros formados nos ex-vértices do cubo, portanto  $6 + 8 = 14$  faces.

- b) O volume de cada pirâmide cortada é:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x \cdot x \cdot x = \frac{x^3}{6}$$

O volume do sólido construído é

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{x^3}{6},$$

pois o volume do cubo original é  $a^3$ . Dessa forma,

$$a^3 - \frac{8x^3}{6} = \frac{5}{6} a^3 \Leftrightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{8x^3}{6} \Leftrightarrow x^3 = \frac{a^3}{8} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Respostas: a) 14 faces

$$b) x = \frac{a}{2}$$