NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não-negativos

i: unidade imaginária; $i^2 = -1$

P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

n(A): número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

arg z: argumento do número complexo z

$[a , b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A^C: complementar do conjunto A

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, n \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1 D

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6. b) 8. c) 10. d) 12. e) 14.

Resolução

1 centavo	5 centavos	10 centavos
25	0	0
20	1	0
15	2	0
15	0	1
10	3	0
10	1	1
5	4	0
5	2	1
5	0	2
0	5	0
0	3	1
0	1	2

O número total de maneiras de trocar a moeda é 12.

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez e igual a

a) $\frac{2}{9}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{4}{9}$. d) $\frac{5}{9}$. e) $\frac{2}{3}$.

Resolução

A probabilidade de os dois errarem o alvo é

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

A probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

Sejam $z = n^2(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$ e
$w = n(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$, em que **n** é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3} + i$.   b) $2(\sqrt{3} + i)$.   c) $2(\sqrt{2} + i)$.
d) $2(\sqrt{2} - i)$.   e) $2(\sqrt{3} - i)$.

Resolução

1) $(1 + i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n [\cos (n \,.\, 45°) + i \,.\, \text{sen } (n \,.\, 45°)]$. **O menor inteiro positivo n que torna** $(1 + i)^n$ **real é 4, pois** $\text{sen } (4 \,.\, 45°) = 0$

2) $$\frac{z}{w} = \frac{n^2 \,.\, (\cos 45° + i \,.\, \text{sen } 45°)}{n \,.\, (\cos 15° + i \,.\, \text{sen } 15°)} =$$

$$= n\,(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) =$$

$$= 4 \,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\,\frac{1}{2}\right) = 2 \,.\, (\sqrt{3} + i)$$

Se arg z = $\frac{\pi}{4}$, então um valor para arg(– 2iz) é

a) $-\frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{\pi}{2}$. d) $\frac{3\pi}{4}$. e) $\frac{7\pi}{4}$.

Resolução

1) $\arg z = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = |z| \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

2) $-2i = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2}\right)$

3) $-2i \cdot z = 2 \cdot |z| \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arg(-2iz) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

Sejam r_1, r_2 e r_3 numeros reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas I e II. e) I, II e III.

Resolução

Dados que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$ e $r_1 + r_2 + r_3 \in \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais, temos:

I) Verdadeira, pois

a)
$$\left.\begin{matrix} r_1 \in \mathbb{Q} \\ r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_2 \in \mathbb{Q} \\ r_1 \in \mathbb{Q} \\ r_1 + r_2 + r_3 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_3 \in \mathbb{Q}$$

b)
$$\left.\begin{matrix} r_2 \in \mathbb{Q} \\ r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 \in Q \\ r_2 \in \mathbb{Q} \\ r_1 + r_2 + r_3 \in Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_3 \in \mathbb{Q}$$

II) Verdadeira, pois

$$\left.\begin{matrix} r_3 \in \mathbb{Q} \\ r_1 + r_2 + r_3 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_3 \in \mathbb{Q} \\ (r_1 + r_2) + r_3 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$$

III) Verdadeira, pois

$$\left.\begin{matrix} r_3 \in \mathbb{Q} \\ (r_1 + r_2) + r_3 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 + r_2 \in \mathbb{Q} \\ r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_1 + r_2 \in \mathbb{Q} \\ 2r_1 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_1 \in \mathbb{Q} \\ r_1 + r_2 \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_2 \in \mathbb{Q}$$

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio
$p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente **a** é igual a

a) $2(1 - \sqrt{2})$.
b) $2(2 + \sqrt{2})$.
c) $4(\sqrt{2} - 1)$.
d) $4 + \sqrt{2}$.
e) $\sqrt{2} - 4$.

Resolução

Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a \\ x_1 x_2 x_3 = -16 \end{cases}$$

Pelas condições dadas e por Girard, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = -2 - \sqrt{2} \\ -3x_2 - (\sqrt{2} + 1)\,x_3 = -4 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} & \text{(I)} \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = -2 - \sqrt{2} & \text{(II)} \\ -\left(\sqrt{2} + \frac{5}{2}\right)x_3 = -10 - 4\sqrt{2} & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (III) temos:

$$\left(\sqrt{2} + \frac{5}{2}\right)x_3 = 4\left(\sqrt{2} + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x_3 = 4.$$

Substituindo nas equações (I) e (II) temos:

$$x_2 = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_1 = 2\sqrt{2}$$

Da segunda relação de Girard, temos:

$$2\sqrt{2}\,.\,(-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\,.\,4 + (-\sqrt{2})\,.\,4 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = a \Leftrightarrow a = 4(\sqrt{2} - 1)$$

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) – 60. b) – 30 c) 0 d) 30 e) 60

Resolução

Se $(x + 2y; 3x - 5y; 8x - 2y; 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética e o último termo é – 127 então

1) $$\begin{cases} 2(3x - 5y) = (x + 2y) + (8x - 2y) \\ 2(8x - 2y) = 3x - 5y - 127 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ 13x + y = -127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 3 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 11x - 7y + 2z = -127 \\ x = -10 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2$$

3) $x \,.\, y \,.\, z = -10 \,.\, 3 \,.\, 2 = -60$

Considere um polinômio p(x), de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i-\sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se p(x) pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5(5 - 2\sqrt{3})$.
b) $15(5 - 2\sqrt{3})$.
c) $30(5 - 2\sqrt{3})$.
d) $45(5 - 2\sqrt{3})$.
e) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

Resolução

$P(x) = a\,(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3)\,(x - r_4)\,(x - r_5)$

São raízes de P(x): $-2i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ r_5$

Como P(x) é divisível por x – 5 então $P(5) = 0 \Rightarrow r_5 = 5$

Então:

$P(x) = a(x + 2i)\,(x - 2i)\,(x + \sqrt{3} - i)\,(x + \sqrt{3} + i)\,.\,(x - 5)$

Sendo $P(1) = 20\,(5 + 2\sqrt{3})$, tem-se:

$20\,(5 + 2\sqrt{3}) =$

$= a\,.\,(1 + 2i)\,(1 - 2i)\,(1 + \sqrt{3} - i)\,(1 + \sqrt{3} + i)\,.\,(-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20\,(5 + 2\sqrt{3}) = a\,.\,(1 + 4)\,[(1 + \sqrt{3})^2 + 1]\,.\,(-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20\,(5 + 2\sqrt{3}) = a\,.\,(-20)\,(5 + 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow a = -1$

Então:

$P(x) = (-1)\,(x + 2i)\,(x - 2i)(x + \sqrt{3} - i)\,(x + \sqrt{3} + i)\,(x - 5)$

Assim, $P(-1) = (-1)\,(5)\,(5 - 2\sqrt{3})\,(-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\,(-1) = 30\,(5 - 2\sqrt{3})$

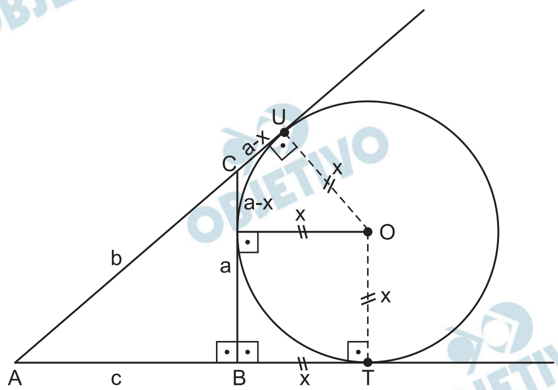
Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \dfrac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado **a** e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. e) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$.

Resolução

O triângulo ABC, com lados de medidas $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$cm e $c = \dfrac{1}{2}$ cm é retângulo em B, pois $b^2 = a^2 + c^2$



Assim, sendo x a medida, em centímetros, do raio da circunferência ex-inscrita ao triângulo ABC, tangente ao lado a e tangente aos prolongamentos dos lados b e c, nos pontos U e T, respectivamente, como AT = AU, tem-se:

$$c + x = b + (a - x) \Leftrightarrow x = \frac{a + b - c}{2}$$

Logo: $$x = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \dfrac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

Sejam A = (0, 0), B = (0, 6) e C = (4, 3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vertice A, em unidades de distância, e igual a

a) $\dfrac{5}{3}$. b) $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$. c) $\dfrac{\sqrt{109}}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. e) $\dfrac{10}{3}$.

Resolução

Sendo G (x_G; y_G) o baricentro do triângulo de vértices A (0, 0), B (0, 6) e C (4, 3), temos:

$$x_G = \frac{0+0+4}{3} = \frac{4}{3} \text{ e } y_G = \frac{0+6+3}{3} = 3$$

A distância de G ($\frac{4}{3}$; 3) ao vértice A (0, 0) é igual a

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+(3-0)^2} = \sqrt{\frac{97}{9}} = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

 D

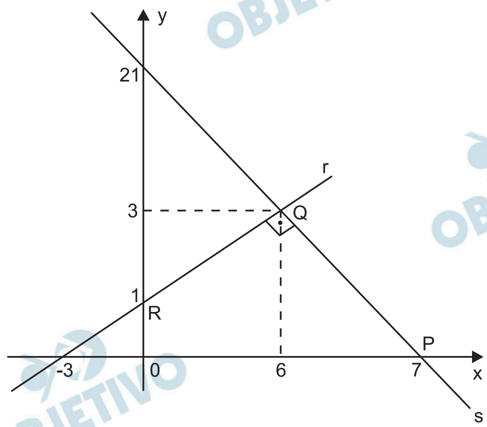
A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas r : x – 3y + 3 = 0 e s : 3x + y – 21 = 0, em unidades de área, é igual a

a) $\dfrac{19}{2}$. b) 10. c) $\dfrac{25}{2}$. d) $\dfrac{27}{2}$. e) $\dfrac{29}{2}$.

Resolução

Sendo Q a intersecção entre as retas r e s, temos Q(6, 3), pois:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$



Considerando-se que a área pedida seja do quadrilátero <u>convexo</u> OPQR, temos:

$$S = \frac{(1 + 3) \,.\, 6}{2} + \frac{1 \,.\, 3}{2} = \frac{27}{2}$$

Dados os pontos A = (0, 0), B = (2, 0) e C = (1, 1), o lugar geométrico do pontos que se encontram a uma distância d = 2 da bissetriz interna, por A, do triangulo ABC é um par de retas definidas por

a) $r_{1,2}: \sqrt{2}\,y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0.$

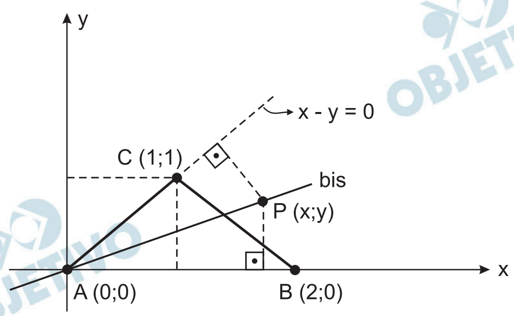
b) $r_{1,2}: \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

c) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

d) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0.$

e) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0.$

Resolução



A equação das bissetriz interna do ângulo A é:

$$\frac{x - y}{\sqrt{2}} = y \Leftrightarrow x - y = \sqrt{2}y \Leftrightarrow x - (\sqrt{2} + 1)y = 0$$

O lugar geométrico dos pontos que distam 2 unidades da bissetriz é um par de retas paralelas definidas por $x - (\sqrt{2} + 1)y \pm k = 0$, onde k é tal que:

$$\frac{|k|}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + 1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |k| = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Assim, suas equações são

$$(\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$$

13 Ⓒ

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;

II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e III. e) II e III.

Resolução

Observemos, primeiramente, que $A \setminus B^C = A \cap B$, pois $\forall x \in U$, temos:

$x \in (A \setminus B^C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B^C \Leftrightarrow$

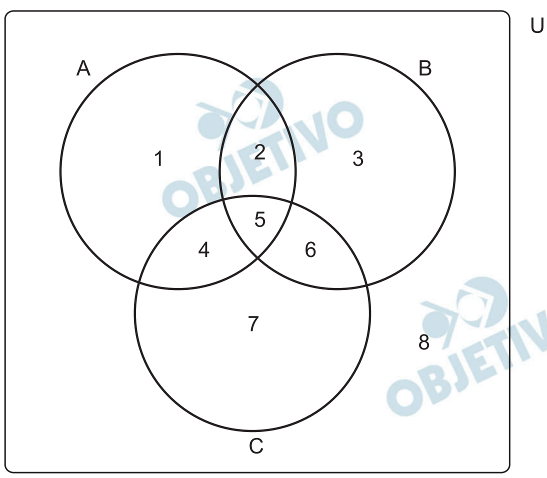
$\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$

I) ***Falsa*, pois**

$(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \cap B) \setminus C^C = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **o que pode não ocorrer, como se vê no exemplo a seguir:**

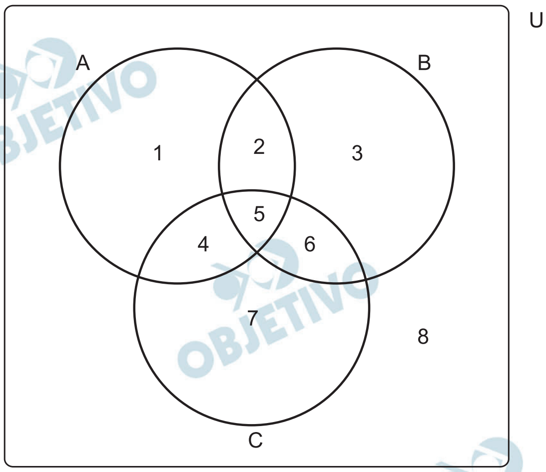


$(A \cap B) \cap C = \{5\} \neq \{2; 4; 5\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

II) ***Falsa*, pois**

$(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \cap B) \setminus C = A \cup (B^C \cup C)$ **o que pode não ocorrer, como se vê no exemplo a seguir:**



$(A \cap B) \setminus C = \{2\} \neq \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} =$
$= A \cup (B^C \cup C)$

III) Verdadeira, pois para $\forall x \in U$, temos:

$x \in (B^C \cup C^C) \Leftrightarrow x \in B^C$ **ou** $x \in C^C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin B$ **ou** $x \notin C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (B \cap C)^C$

Desta forma, $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que n (P (A) ∪ P (B)) + 1 = n (P (A ∪ B)). Então, a diferença n(A) – n(B) pode assumir

a) um único valor.

b) apenas dois valores distintos.

c) apenas três valores distintos.

d) apenas quatro valores distintos.

e) mais do que quatro valores distintos.

Resolução

***A* e *B* dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), ambos finitos e não vazios.**

***A* tem *x* elementos e *B* tem y elementos, então**

1) $n(P(A)) = 2^x$, $n(P(B)) = 2^y$, $n(P(A \cup B)) = 2^{x+y}$ e $n(P(A) \cup P(B)) = 2^x + 2^y - 1$

2) $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B)) \Rightarrow$
$$\Rightarrow 2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y} \Rightarrow 2^x \cdot 2^y - 2^x - 2^y + 1 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^x(2^y - 1) - (2^y - 1) = 1 \Rightarrow (2^y - 1) \cdot (2^x - 1) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^y - 1 = 1 \text{ e } 2^x - 1 = 1 \Rightarrow 2^x = 2 \text{ e } 2^y = 2 \Rightarrow x = y = 1$$

3) $n(A) - n(B) = x - y = 1 - 1 = 0$

15 C

Considere um número real $a \neq 1$ postivo, fixado, e a equação em **x** $a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;

II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;

III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;

IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I. b) I e III. c) II e III.

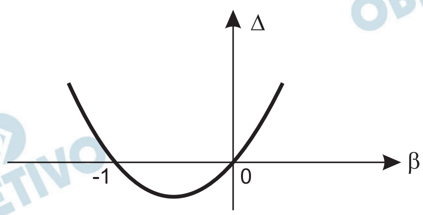
d) II e IV. e) I, III e IV.

Resolução

Sendo $a^x = y > 0$, com $a \neq 1$ e $a > 0$, temos:

$$a^{2x} + 2\beta \cdot a^x - \beta = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\beta y - \beta = 0$$

O discriminante dessa equação do segundo grau é $\Delta = 4\beta^2 + 4\beta$ cujo gráfico é do tipo



Assim sendo:

1) **Se $-1 < \beta < 0$ então $\Delta < 0$, a equação do segundo grau em y não tem solução real e a equação em x também não tem solução real.**

2) **Se $\beta = 0$ então $y = 0$ e a equação em x não tem solução real pois $y = a^x > 0, \forall x$.**

3) **Se $\beta = -1$ então $y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0$ e a equação tem uma única solução real.**

4) **Se $\beta > 0$ então a equação do segundo grau em y tem duas soluções reais distintas, uma positiva e outra negativa (pois o produto é negativo).**
   Como $y = a^x > 0$ então a equação em x tem uma única solução real.

5) **São verdadeiras, portanto, as afirmações II e III.**

Seja $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{arc sen}\left(\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \right.$

$\left. + \text{arc cos}\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} \right\}$. Então,

a) $S = \varnothing$.
b) $S = \{0\}$.
c) $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
d) $S = \mathbb{R}^+$.
e) $S = \mathbb{R}$.

Resolução

Seja $\alpha = \text{arc sen}\left(\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right)$ e $\beta = \text{arc cos}\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$

Sendo:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \text{arc cos}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

Temos:

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{x} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \text{ pois } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, $S = \{0\}$

17 B

Seja x ∈ [0, 2π] tal que $\text{sen}(x)\cos(x) = \dfrac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de tg (x) são, respectivamente

a) 1 e 0.

b) 1 e $\dfrac{5}{2}$.

c) –1 e 0.

d) 1 e 5.

e) –1 e $-\dfrac{5}{2}$.

Resolução

$$\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{5\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{2}{5}(1 + \text{tg}^2 x) \Leftrightarrow 2\text{tg}^2 x - 5\text{tg } x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } x = 2 \text{ ou } \text{tg } x = \frac{1}{2}$$

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $\text{sen}(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

Resolução

1) $\sum_{k=0}^{n} [\cos(\alpha + k\pi)] = \cos\alpha + \cos(\alpha + \pi) + \cos(\alpha + 2\pi) +$

$+ \ldots + \cos(\alpha + n\pi) =$

$= \cos\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha + \ldots + (-1)^n \cdot \cos\alpha$

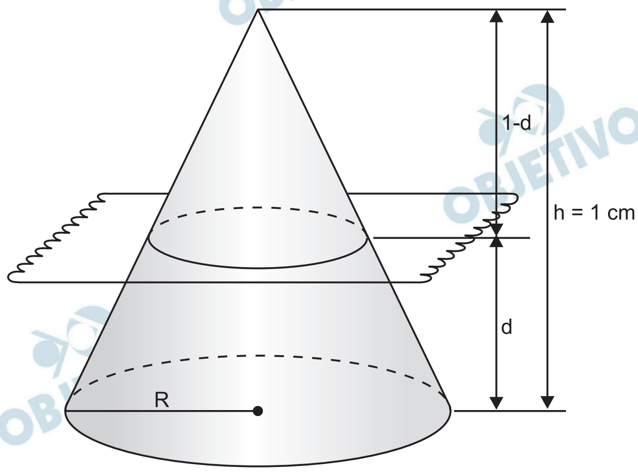
2) **Se n for par então** $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha$

3) **Se n for ímpar então** $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = 0$

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.

Resolução



Sendo V o volume do cone original, em centímetros cúbicos, R e h as medidas, em centímetros, do raio da base e da altura, respectivamente, temos:

$$R^2 + 1^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{3} \text{ e } V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 \,.\, h =$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi \,.\, \frac{1}{3} \,.\, 1 = \frac{\pi}{9}$$

Assim, sendo v o volume, em centímetros cúbicos, do novo cone, que é igual ao volume do cubo e d, a distância, em centímetros, do plano à base do cone original, temos:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{1-d}{1}\right)^3 \Rightarrow \frac{\left[\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}\right]^3}{\frac{\pi}{9}} = \left(\frac{1-d}{1}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{27} = \left(\frac{1-d}{1}\right)^3 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a 3π cm^2. A area total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

b) 4π e $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

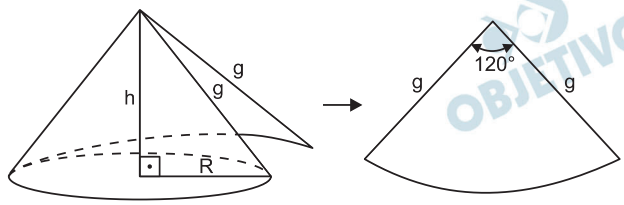
c) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

d) 3π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

e) π e $2\pi\sqrt{2}$.

Resolução

Sejam g, h e R as medidas, em centímetros, da geratriz, da altura e do raio da base, desse cone, respectivamente.



De acordo com o enunciado, tem-se:

1) $\dfrac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot g^2 = 3\pi \Leftrightarrow g = 3$

2) $\pi R g = 3\pi \Leftrightarrow Rg = 3$
assim: $R \cdot 3 = 3 \Leftrightarrow R = 1$

3) $h^2 + R^2 = g^2$
assim: $h^2 + 1^2 = 3^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$

4) **A área total, em centímetros quadrados, é:**
$S_t = \pi R\,(g + R) = \pi \cdot 1 \cdot (3 + 1) = 4\pi$

5) **O volume, em centímetros cúbicos, é:**
$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Resolução

1) **O número de maneiras de formar dois conjuntos de cinco cartões cada é $\frac{1}{2} \cdot C_{10,5} = \frac{1}{2} \cdot 252 = 126$**

2) **O número de maneiras de os números *9* e *10* pertencerem ao mesmo conjunto é $C_{8,3} = 56$**

9	10			

3) **A probabilidade é $\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$**

Resposta: $\frac{4}{9}$

Determine os valores reais de **x** de modo que $\mathrm{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Resolução

Seja $f(x) = \mathrm{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{sen}(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2x) \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\mathrm{sen}(2x) \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} \cdot \cos(2x) \right) =$$

$$= 2 \cdot \mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

Assim, para que f(x) seja máximo devemos ter

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, (n \in \mathbb{Z})$$

Resposta: $x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, (n \in \mathbb{Z})$

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1 + x_1, 1 + x_2, ..., 1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Resolução

1) **A matriz A é**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$$

Desta forma,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \, x_n$$

2) **Como** $(x_1; x_2; x_3; ...; x_n) = \left(\frac{1}{2}; 2; 8; ...; 2^{2n-3}\right)$,

pois trata-se de uma PG de primeiro termo $\frac{1}{2}$ **e razão 4, temos**

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \, ... \, x_n = 2^{-1} \cdot 2^1 \cdot 2^3 \, ... \, 2^{2n-3} =$

$= 2^{\frac{(-1 + 2n - 3) \cdot n}{2}} = 2^{n^2 - 2n}$

3) **Sendo det A = 256, temos:**

$2^{n^2-2n} = 256 \Leftrightarrow 2^{n^2-2n} = 2^8 \Leftrightarrow n^2 - 2n = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow n = 4$, **pois** $n > 0$

Assim, a ordem da matriz A é n + 1 = 5

Resposta: 5

Seja **n** um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine **n** e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Resolução

Sendo $A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, **então:**

1) Se det A = 9, temos:

$-2n^2 + 19n - 30 = 9 \Leftrightarrow n = 3$, **pois** $n \in \mathbb{N}$.

2) Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & m & x \\ b & q & y \\ c & p & z \end{bmatrix}$, **para n = 3, temos:**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & m & x \\ b & q & y \\ c & p & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b + c = 1 \\ 8a + 3b + 5c = 0 \\ -5a - 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Logo, a soma dos elementos da primeira coluna de A^{-1} é igual a a + b + c = –1

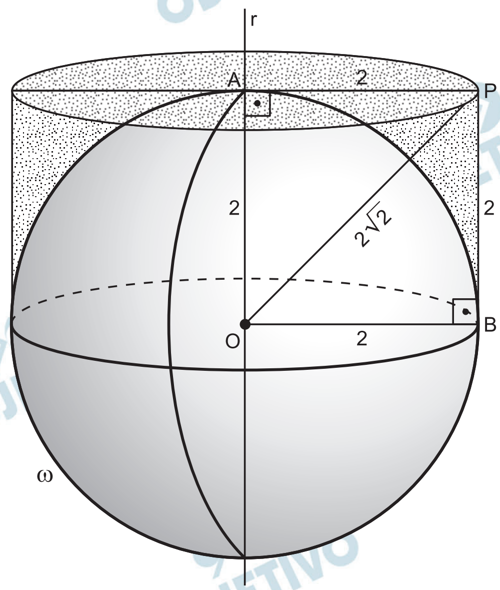
Respostas: n = 3 e a soma é – 1

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Resolução



Sendo 0 o centro de ω e r a reta perpendicular ao segmento $\overline{PA}$ conduzida por 0 (centro de ω), podemos concluir que o quadrilátero OBPA é um quadrado de lado medindo 2cm e que o sólido obtido ao girar a região plana fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo menor dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ em torno da reta r é um cilindro circular reto de raio da base R = 2cm e altura H = 2cm com uma cavidade na forma de semiesfera de raio R = 2cm.

Assim:

a) A área total S, em centímetros quadrados, da superfície desse sólido é dada por:

$$S = \pi R^2 + 2\pi R H + \frac{4\pi R^2}{2} =$$

$$= \pi R(2H + 3R) = 20\pi$$

b) O volume V, em centímetros cúbicos, desse sólido é dado por:

$$V = \pi R^2 H - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \pi R^2 \left(H - \frac{2R}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Respostas: a) 20π cm^2 b) $\frac{8\pi}{3}$ cm^3

As interseções das retas r: $x - 3y + 3 = 0$, s: $x + 2y - 7 = 0$ e t: $x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

Resolução

1) **A base desse prisma reto é o triângulo de vértices A (3; 2), B (7; 0) e C (0; 1) pois:**

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2) **A área S desse triângulo é dada por:**

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = 5$$

3) **O perímetro desse triângulo é 2p = AB + BC + AC assim:**

$$2p = \sqrt{(7-3)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(7-0)^2 + (0-1)^2} + $$
$$+ \sqrt{(0-3)^2 + (1-2)^2} \Leftrightarrow 2p = \sqrt{20} + \sqrt{50} + \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2p = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$$

a) **A área total A_t da superfície do sólido é dada por**

$$A_t = 2S + 2ph$$

assim: $A_t = 10 + 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A_t = 2\,(5 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10})$$

b) **O volume V do sólido é dado por V = S . h**

assim: $V = 5 \,.\, 2 \Leftrightarrow V = 10$

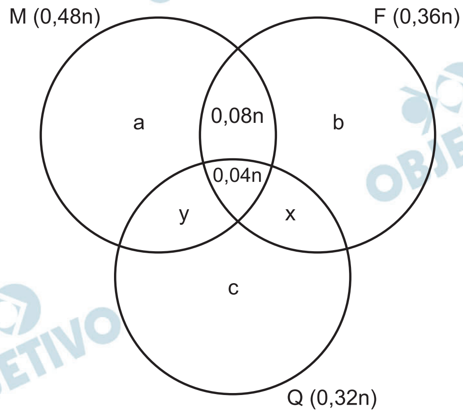
Respostas: a) $2\,(5 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10})$ unidades de área

b) 10 unidades de volume

Dos **n** alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três materias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine **n**.

Resolução

1) De acordo com os dados, temos o seguinte diagrama:



2) $x + y = 63$

3) $\begin{cases} a + 0{,}12n + y = 0{,}48n \\ b + 0{,}12n + x = 0{,}36n \\ c + 0{,}04n + x + y = 0{,}32n \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + y = 0{,}36n \\ b + x = 0{,}24n \\ c + x + y = 0{,}28n \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b + c + 2 \,.\, 63 = 0{,}88n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0{,}88n - 126 \qquad \text{(I)}$

4) $a + b + c + x + y + 0{,}12n = n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b + c + x + y = 0{,}88n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b + c + 63 = 0{,}88n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0{,}88n - 63 \qquad \text{(II)}$

5) Comparando-se as equações (I) e (II), observa-se que elas são incompatíveis.

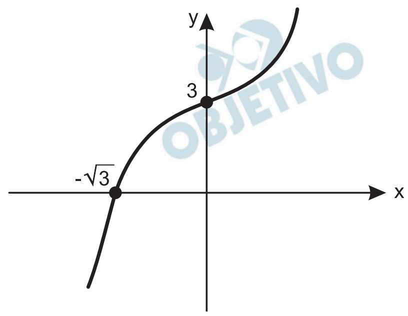
Resposta: não existe n

Analise se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geqslant 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Resolução

1) O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geqslant 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases} \text{ é}$$



formado de dois ramos de parábolas de vértice (0; 3). Esta função é estritamente crescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

2) $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = \begin{cases} 3 + [f^{-1}(x)]^2 = x, \text{ se } f^{-1}(x) \geqslant 0 \\ 3 - [f^{-1}(x)]^2 = x, \text{ se } f^{-1}(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}, \text{ com } x \geqslant 3 \\ f^{-1}(x) = -\sqrt{3 - x}, \text{ com } x < 3 \end{cases}$$

Resposta: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3}, \text{ com } x \geqslant 3 \\ -\sqrt{3 - x}, \text{ com } x < 3 \end{cases}$

Determine os valores de $\theta \in [0,2\pi]$ tais que $\log_{tg(\theta)} e^{sen(\theta)} \geqslant 0$.

Resolução

1) **Se tg $\theta > 1$ então**

   $\log_{tg\,\theta}(e^{sen\,\theta}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{sen\,\theta} \geq 1 \Leftrightarrow sen\,\theta \geq 0$

   Se tg $\theta > 1$ e sen $\theta \geq 0$ então $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$

2) **Se $0 <$ tg $\theta < 1$ então**

   $\log_{tg\,\theta}(e^{sen\,\theta}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{sen\,\theta} \leq 1 \Leftrightarrow sen\,\theta \leq 0$

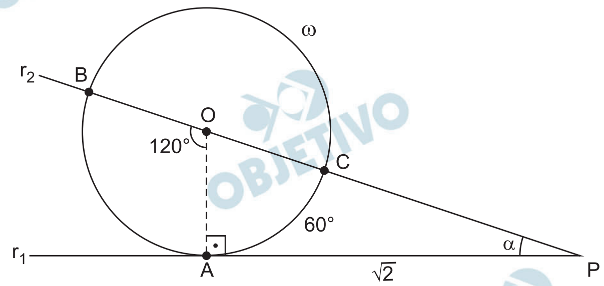
   Se $0 <$ tg $\theta < 1$ e sen $\theta \leq 0$ então $\pi < x < \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $\left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi; \dfrac{5\pi}{4}\right[$

30

As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 intercepta ω nos pontos B e C diametralmente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Resolução



De acordo com o enunciado, a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é $180° - 60° = 120°$. Assim, a medida α do ângulo $A\hat{P}B$ é dada por:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{120° - 60°}{2} = 30°$$

No triângulo APO, retângulo em $\hat{A}$, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AO}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AO}{\sqrt{2}} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}$$

Assim, a área S do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ é:

$$S = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot (AO)^2 = \frac{1}{3}\,\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2\pi}{9}\ \text{cm}^2$$

Resposta: $\frac{2\pi}{9}$ cm²