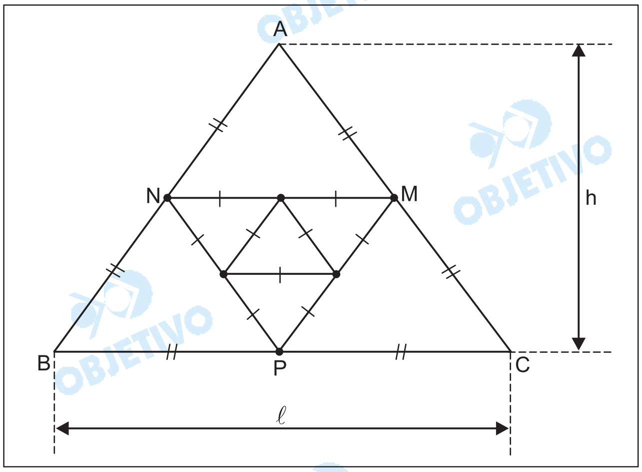
1

Considere um triângulo eqüilátero T_1 de área $16\sqrt{3}$ cm^2. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo eqüilátero T_2, que tem os pontos médios dos lados de T_1 como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo eqüilátero T_3, e assim por diante, indefinidamente. Determine:

a) as medidas do lado e da altura do triângulo T_1, em centímetros;

b) as áreas dos triângulos T_2 e T_7, em cm^2.

Resolução



a) *O lado ℓ e a altura h do triângulo eqüilátero T_1, representado na figura por ABC, em cm, são tais que:*

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ e } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = 8 \text{ e } h = 4\sqrt{3}$$

b) *As áreas dos triângulos T_1, T_2, T_3, ... formam uma progressão geométrica de primeiro termo $A_{T_1} = 16\sqrt{3}$ cm^2 e razão*

$$\frac{A_{T_2}}{A_{T_1}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Desta forma,

$$A_{T_2} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 =$$

$$= 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4} = 4\sqrt{3}\text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$A_{T_7} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 =$$

$$= 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{\sqrt{3}}{256}\text{ cm}^2$$

Respostas: *a) 8 cm e $4\sqrt{3}$ cm*

b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e $\dfrac{\sqrt{3}}{256}$ cm^2

2

Considere os números complexos z = 2 – i e w = –3 –i, sendo i a unidade imaginária.

a) Determine z.w e $|w - z|$.

b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, de modo que os números complexos z, w e t = bi sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

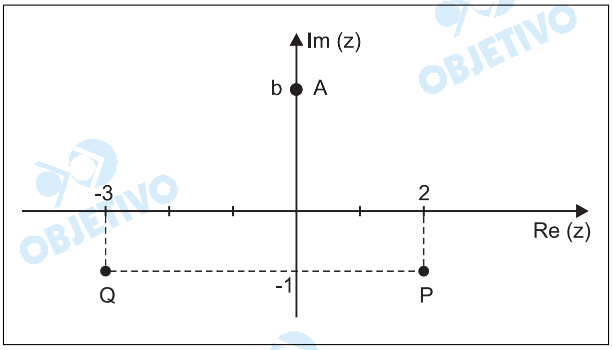
Resolução

Se z = 2 – i e w = – 3 – i então

a) $z \,.\, w = (2 - i) \,.\, (-3 - i) = -6 - 2i + 3i - 1 = -7 + i$

$|w - z| = |(-3 - i) - (2 - i)| = |-5| = 5$

b) *Sejam P, Q e A os afixos dos números complexos z = 2 – i, w = – 3 – i e t = bi, respectivamente.*



A área do triângulo APQ é 20 e portanto:

$$\frac{[2 - (-3)] \,.\, [b - (-1)]}{2} = 20 \Leftrightarrow 5\,(b + 1) = 40 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b + 1 = 8 \Leftrightarrow b = 7$

Respostas: *a)* $z \,.\, w = -7 + i$

$|w - z| = 5$

b) $b = 7$

3

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \dfrac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de A é um polinômio p(x).

a) Verifique se 2 é uma raiz de p(x).

b) Determine todas as raízes de p(x).

Resolução

Sendo $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \dfrac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$, *então*

$\det A = p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

a) *2 é raiz de p(x), pois* $p(2) = 2^3 - 2 \,.\, 2^2 - 2 + 2 = 0$

b) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \Leftrightarrow p(x) = x^2 \,.\, (x - 2) - (x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(x) = (x - 2) \,.\, (x^2 - 1)$

As raízes de p(x) são tais que:

$x - 2 = 0$ *ou* $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ *ou* $x = \pm 1$

Respostas: *a) 2 é raiz, pois p(2) = 0*

b) As raízes de p(x) são: – 1; 1 e 2.

4

Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

Resolução

Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a) A quantidade total de números de seis algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos de A é $P_6 = 6! = 720$.

Os números do item anterior, que começam com o algarismo 1 são os que se obtém permutando-se os algarismos {2;3;4;5;6} e, portanto, a quantidade total é $P_5 = 5! = 120$.

1					

b) 1) A quantidade de números de 5 algarismos do item anterior, cujo primeiro algarismo é 1 ou 2 ou 3 ou 4, é 4 . 120 = 480.

2) Esses 480 números são todos menores que o número 512346.

3) O menor número de 6 algarismos do item (a) que começa com o algarismo 5 é o próprio 512346.

4) Escrevendo os números do item (a) em ordem crescente, a posição ocupada pelo número 512346 é a 481ª.

5) Existem 240 números cujo primeiro algarismo é 1 ou 2.

6) Os dois menores números cujo primeiro algarismo é 3 são 312456 e 312465.

7) Escrevendo todos os números de 6 algarismos do item (a) em ordem crescente, o número que ocupa a 242ª posição é 312465.

Respostas: *a) 720; 120*

b) 481ª; 312465

5

Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação $x^2 + bx + 1 = 0$. Determine

a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.

b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

Resolução

a) A equação $x^2 + bx + 1 = 0$ tem raízes reais $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 2$, pois $b \in \mathbb{N}$ e $1 \leq b \leq 6$.
Portanto, $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
No lançamento do dado honesto, a probabilidade de a equação admitir raízes reais é $\frac{5}{6}$.

*b) Sabendo-se que **b** é ímpar, então b = 1 ou b = 3 ou b = 5 e a probabilidade de a equação, nessas condições, admitir raízes reais é $\frac{2}{3}$.*

Respostas: *a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{3}$.*

6

A reta r de equação $y = \dfrac{x}{2}$ intercepta a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ em dois pontos P e Q, sendo que as coordenadas de P são ambas positivas. Determine:

a) a equação da circunferência e os pontos P e Q;

b) a equação da reta s, perpendicular a r, passando por P.

Resolução

a) A equação da circunferência, com centro na origem e raio $\sqrt{5}$ é $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Os pontos de intersecção da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e da reta de equação $y = \dfrac{x}{2}$ são obtidos a partir do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dessa forma as coordenadas dos pontos P e Q, são respectivamente, (2; 1) e (–2; –1), visto que as coordenadas de P são ambas positivas.

b) A reta (r) de equação $y = \dfrac{x}{2}$, tem coeficiente angular $m_r = \dfrac{1}{2}$ e a reta (s), perpendicular a (r) terá coeficiente angular m_s, tal que $m_s = \dfrac{-1}{m_r} = \dfrac{-1}{1/2} = -2$.

Portanto a equação da reta (s), que passa pelo ponto P (2; 1), com coeficiente angular – 2, é:

$y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

Respostas: *a) $x^2 + y^2 = 5$; P(2; 1) e Q(–2; –1)*

b) $2x + y - 5 = 0$

7

Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro n (tamanho do calçado) em função do comprimento c, do pé, em cm.

Pela fórmula, tem-se n = [x], onde $x = \frac{5}{4}c + 7$ e [x] indica o menor inteiro maior ou igual a x. Por exemplo, se c = 9 cm, então x = 18,25 e n = [18,25] = 19. Com base nessa fórmula,

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.

b) se o comprimento do pé de uma pessoa é c = 24 cm, então ela calça 37. Se c > 24 cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

Resolução

a) *Para um pé com 22 cm de comprimento o número do calçado é*

$$n = \left[\frac{5}{4}.22 + 7\right] = [34,5] = 35$$

b) *A pessoa que calça 38 tem o comprimento c, em cm, do pé de forma que*

$$n = \left[\frac{5}{4}\ .\ c + 7\right] = 38 \Leftrightarrow 37 < \frac{5}{4}\ .\ c + 7 \leq 38 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 < \frac{5}{4}\ .\ c \leq 31 \Leftrightarrow 120 < 5\ .\ c \leq 124 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 < c \leq 24,8$$

Desta forma, o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38 é 24,8.

Respostas: *a) 35*

b) 24,8 cm

8

Considere as funções

$f(x) = \log_3(9x^2)$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, definidas para todo $x > 0$.

a) Resolva as duas equações: $f(x) = 1$ e $g(x) = -3$.

b) Mostre que $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$.

Resolução

Sejam V_f e V_g os conjuntos-verdade das respectivas equações

a) Para $x > 0$ temos:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \log_3(9x^2) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_f = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$g(x) = -3 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = 27 \Leftrightarrow V_g = \{27\}$$

b) $$1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 1 + \log_3\left(9x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + \log_3(9x) =$$

$$= 1 + \log_3 9 + \log_3 x = 1 + 2 + \log_3 x = 3 + \log_3 x$$

Respostas: *a)* $V_f = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ *e* $V_g = \{27\}$

b) demonstração

9

A temperatura, em graus celsius (°C), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, das 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),\ 0 \le t \le 24,$$

com t em horas. Determine:

a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$);

b) em quais horários do dia a temperatura atingiu 0 °C.

Resolução

a) A partir do enunciado, sendo f(t) em graus celsius (°C), temos:

$$f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \,.\, 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \,.\, 2\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1{,}7 - 1}{2} = 0{,}35$$

$$f(9) = \cos\left(\frac{\pi}{12} \,.\, 9\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \,.\, 9\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{1{,}4}{2} = -0{,}7$$

b) Se f(t) = 0, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} \,.\, t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \,.\, t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} \,.\, t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \,.\, t\right)$$

A igualdade é verificada, quando:

***1ª possibilidade**:* $\frac{\pi}{6} \,.\, t = \frac{\pi}{12} \,.\, t + n \,.\, 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = n \,.\, 24,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \le t \le 24$*, resulta t = 0 ou t = 24*

***2ª possibilidade**:* $\frac{\pi}{6} \,.\, t = -\frac{\pi}{12} \,.\, t + n \,.\, 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = n \,.\, 8,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \le t \le 24$*, resulta t = 0 ou t = 8 ou t = 16 ou t = 24*

Portanto, a temperatura atingiu 0°C nos seguintes horários:
0 hora
8 horas
16 horas
24 horas

Respostas: *a) f(2) = 0,35°C; f(9) = – 0,7°C*
b) 0h, 8h, 16h e 24h

10

Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm.

Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao triplo do raio;

b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução

a) *O volume V do cilindro é dado por* $V = \pi \cdot y^2 \cdot x$.
Assim, para $V = 243\ cm^3$, $\pi = 3$ *e* $x = 3 \cdot y$ *temos*
$3 \cdot y^2 \cdot 3y = 243 \Leftrightarrow y^3 = 27 \Leftrightarrow y = 3$ *e, portanto,*
$x = 3 \cdot 3 = 9$

b) *A área lateral* A_L *do cilindro é dada por*
$A_L = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot x$
Assim, para $A_L = 450\ cm^2$, $\pi = 3$ *e* $x = y + 10$ *temos:*
$2 \cdot 3 \cdot y\,(y + 10) = 450 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 5$, *pois* $y > 0$
Logo, $x = y + 10 = 5 + 10 = 15$

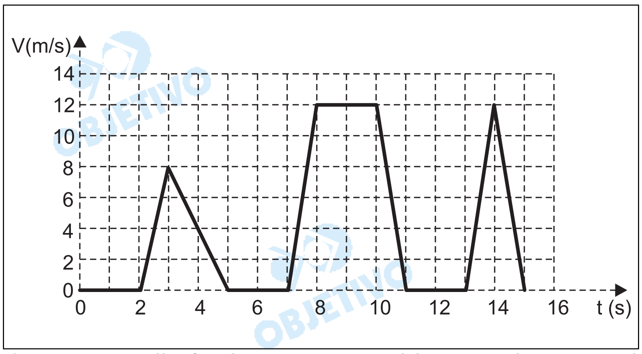
Respostas: *a)* $x = 9$ *e* $y = 3$
b) $x = 15$ *e* $y = 5$

Comentário

Com questões bem enunciadas, quase todas relacionadas a algum problema prático e envolvendo dois ou mais assuntos do programa, a Banca Examinadora apresentou uma prova criativa e de bom nível.

11

O gráfico na figura descreve o movimento de um caminhão de coleta de lixo em uma rua reta e plana, durante 15s de trabalho.



a) Calcule a distância total percorrida neste intervalo de tempo.

b) Calcule a velocidade média do veículo.

Resolução

a) $\Delta s = \text{área } (V \times t)$

$0 \to 2s: \quad \Delta s_1 = 0$

$2s \to 5s: \quad \Delta s_2 = \dfrac{3 \cdot 8}{2} (m) = 12m$

$5s \to 7s: \quad \Delta s_3 = 0$

$7s \to 11s: \quad \Delta s_4 = (4 + 2) \dfrac{12}{2} (m) = 36m$

$11s \to 13s: \Delta s_5 = 0$

$13s \to 15s: \Delta s_6 = 2 \cdot \dfrac{12}{2} (m) = 12m$

$\Delta s = 12m + 36m + 12m \Rightarrow \boxed{\Delta s = 60m}$

b) $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$V_m = \dfrac{60m}{15s} \Rightarrow \boxed{V_m = 4m/s}$

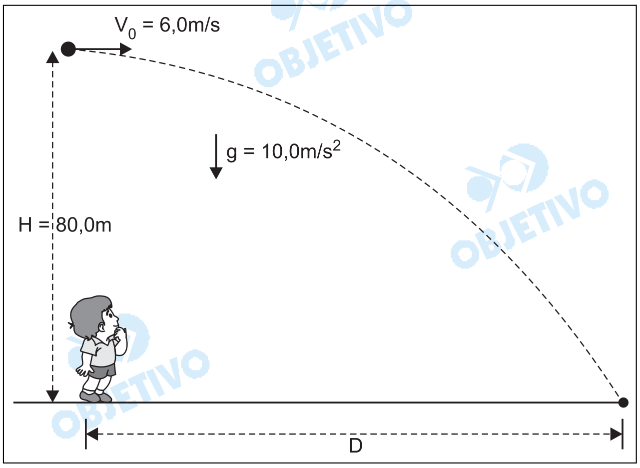
Respostas: *a) 60m*
b) 4m/s

12

Um balão se desloca horizontalmente, a 80,0 m do solo, com velocidade constante de 6,0 m/s. Quando passa exatamente sobre um jovem parado no solo, um saquinho de areia é abandonado do balão. Desprezando qualquer atrito do saquinho com o ar e considerando $g = 10,0\ m/s^2$, calcule

a) o tempo gasto pelo saquinho para atingir o solo, considerado plano.
b) a distância entre o jovem e o ponto onde o saquinho atinge o solo.

Resolução



a) *O tempo gasto é calculado pelo movimento vertical (MUV):*

$$\Delta s_y = V_{0_y}\, t + \frac{\gamma_y}{2}\, t^2 \downarrow \oplus$$

$$80,0 = 0 + \frac{10,0}{2}\, T^2$$

$$T^2 = 16,0 \Rightarrow \boxed{T = 4,0s}$$

b) *Analisando-se o movimento horizontal (MU), vem:*

$$\Delta x = V_x\, t$$

$$D = 6,0 \,.\, 4,0\ (m) \Rightarrow \boxed{D = 24,0m}$$

Respostas: *a) 4,0s*
b) 24,0m

13

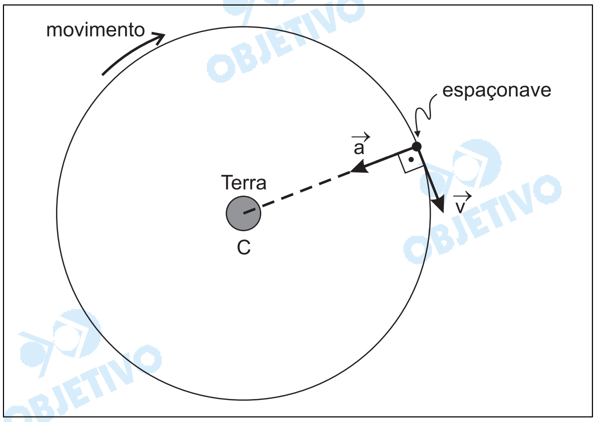
Uma espaçonave de massa m gira em torno da Terra com velocidade constante, em uma órbita circular de raio R. A força centrípeta sobre a nave é 1,5 GmM/R^2, onde G é a constante de gravitação universal e M a massa da Terra.

a) Desenhe a trajetória dessa nave. Em um ponto de sua trajetória, desenhe e identifique os vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração centrípeta $\vec{a}$ da nave.

b) Determine, em função de M, G e R, os módulos da aceleração centrípeta e da velocidade da nave.

Resolução

a)



A velocidade vetorial $\vec{v}$ é tangente à trajetória e tem o sentido do movimento.
A aceleração centrípeta é dirigida para o centro da trajetória e tem direção radial.

b) 1) A força gravitacional que a Terra aplica no satélite faz o papel de resultante centrípeta e, portanto:

$$F_{cp} = F_G = \frac{GMm}{R^2} = m\, a_{cp}$$

$$\boxed{a_{cp} = \frac{GM}{R^2}}$$

2) $$a_{cp} = \frac{GM}{R^2} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

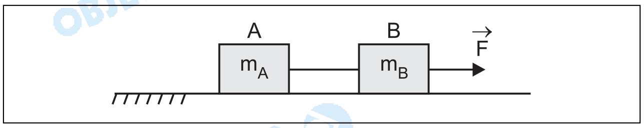
Contudo, o enunciado apresentou a força centrípeta com um misterioso fator 1,5 multiplicando a força gravitacional entre a Terra e a espaçonave. Imaginando a presença de um misterioso propulsor que aumenta a intensidade da força centrípeta (o que não foi citado no enunciado), escrevemos:

$$1{,}5\,\frac{GMm}{R^2} = m\, a_{cp} \Rightarrow \boxed{a_{cp} = 1{,}5\,\frac{GM}{R^2}}$$

$$a_{cp} = \frac{1{,}5\, GM}{R^2} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{1{,}5\, GM}{R}}}$$

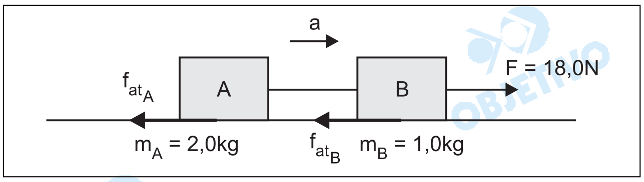
14

A figura ilustra um bloco A, de massa m_A = 2,0 kg, atado a um bloco B, de massa m_B = 1,0 kg, por um fio inextensível de massa desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a mesa é μ_c. Uma força F = 18,0 N é aplicada ao bloco B, fazendo com que ambos se desloquem com velocidade constante.



Considerando g = 10,0 m/s², calcule
a) o coeficiente de atrito μ_c.
b) a tração T no fio.

Resolução



a) *Sendo a velocidade constante, a força resultante no sistema é nula.*

$F = f_{at_A} + f_{at_B}$

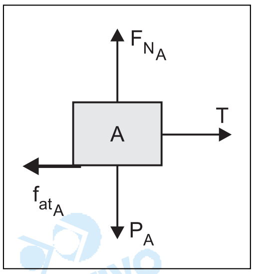
$F = \mu P_A + \mu P_B$

$F = \mu\,(P_A + P_B)$

$18{,}0 = \mu\ 30{,}0$

$\boxed{\mu = 0{,}60}$

b) *Isolando-se o bloco A:*



$F_{N_A} = P_A = 20{,}0N$

Sendo a velocidade constante:

$T = f_{at_A} = \mu\, P_A \Rightarrow T = 0{,}60\ .\ 20{,}0\ (N)$

$\boxed{T = 12{,}0N}$

Respostas: *a) 0,60*
b) 12,0N

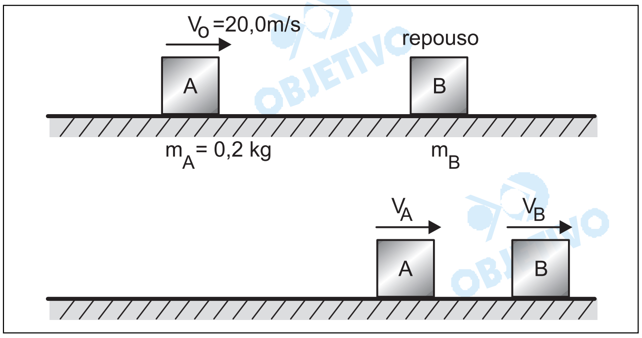
15

Uma partícula A, com massa m = 0,2 kg, colide frontalmente com uma partícula B, com massa maior que a de A, e que inicialmente se encontra em repouso. A colisão é totalmente elástica e a energia cinética final da partícula A cai para 64% de seu valor inicial. Se a velocidade inicial da partícula A for v_o = 20,0 m/s, calcule

a) a velocidade final da partícula A.

b) a quantidade de movimento da partícula B após a colisão.

Resolução



a) $E'_{cin_A} = 0,64\ E_{cin_A}$

$$\frac{m_A V_A^2}{2} = 0,64\ \frac{m_A V_0^2}{2}$$

$V_A^2 = 0,64\ V_0^2 \Rightarrow V_A = -0,80\ V_0 = -0,80\ .\ 20,0\ (m/s)$

$\boxed{V_A = -16,0 m/s}$

Como a massa de B é maior que a de A, o bloco A inverte o sentido de seu movimento após a colisão, o que justifica o sinal negativo de V_A.

b) *No ato da colisão, o sistema é isolado e teremos a conservação da quantidade de movimento total:*

$Q_{após} = Q_{antes}$

$m_A V_A + Q_B = m_A V_0$

$Q_B = m_A\ (V_0 - V_A) = 0,2\ [20,0 - (-16,0)]\ (SI)$

$\boxed{Q_B = 7,2 kg.m/s}$

Respostas: *a) –16,0m/s*
b) 7,2kg . m/s

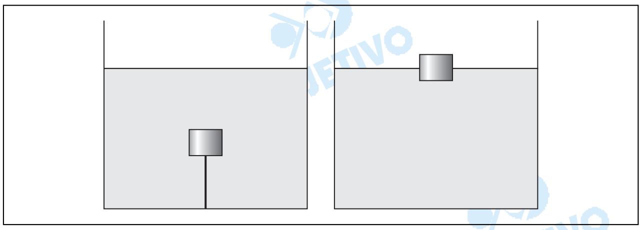
16

Um bloco de madeira de volume V = 60 cm^3, totalmente submerso, está atado ao fundo de um recipiente cheio de água por meio de um fio de massa desprezível. O fio é cortado e o bloco emerge na superfície com 1/4 de seu volume fora da água. Sendo g = 10 m/s^2 a aceleração da gravidade e D = 1 g/cm^3 a massa específica da água, calcule

a) a massa específica do bloco.

b) a tração no fio, antes de ser cortado.

Resolução



a) *Para o bloco flutuando na superfície do líquido, temos:*

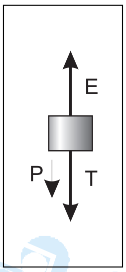
$E = P$

$\mu_L \, V_i \, g = \mu_B \, V_B \, g$

$$\frac{\mu_B}{\mu_L} = \frac{V_i}{V} = \frac{3}{4}$$

$$\mu_B = \frac{3}{4} \mu_L = \frac{3}{4} 1{,}0 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow \boxed{\mu_B = 0{,}75 \text{g/cm}^3}$$

b)



Para o equilíbrio do bloco, temos:

$E = P + T$

$\mu_L \, V_B \, g = \mu_B \, V_B \, g + T$

$T = (\mu_L - \mu_B) \, V_B \, g$

$T \, (1{,}0 - 0{,}75) \, . \, 10^3 \, . \, 60 \, . \, 10^{-6} \, . \, 10 \, (N)$

$T = 1{,}5 \, . \, 10^{-1} N$

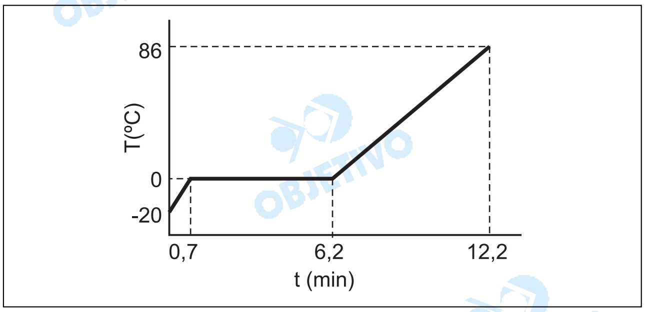
$$\boxed{T = 0{,}15N}$$

Respostas: *a) 0,75g/cm^3 ou 7,5 . 10^2kg/m^3*

b) 0,15N ou 1,5 . 10^{-1}N

17

Uma quantidade de 1,5 kg de certa substância encontra-se inicialmente na fase sólida, à temperatura de –20°C. Em um processo a pressão constante de 1,0 atm, ela é levada à fase líquida a 86°C. A potência necessária nessa transformação foi de 1,5 kJ/s. O gráfico na figura mostra a temperatura de cada etapa em função do tempo.



Calcule

a) o calor latente de fusão L_f.

b) o calor necessário para elevar a temperatura de 1,5kg dessa substância de 0 a 86°C.

Resolução

a) *Usando-se a expressão da potência, temos:*

$$Pot = \frac{Q}{\Delta t}$$

A fusão da substância ocorre no trecho representado no gráfico pelo patamar (entre 0,7min. e 6,2min) e, assim:

$$Pot = \frac{m\ L_F}{\Delta t}$$

$$1,5 = \frac{1,5\ .\ L_F}{(6,2 - 0,7)\ .\ 60}$$

$$\boxed{L_F = 330\ kJ/kg}$$

b) *O aquecimento da substância de 0°C a 86°C é indicado no diagrama no trecho entre 6,2 min. e 12,2 min.*

Portanto:

$Q = Pot\ \Delta t$

$Q = 1,5\ .\ (12,2 - 6,2)\ .\ 60\ (kJ)$

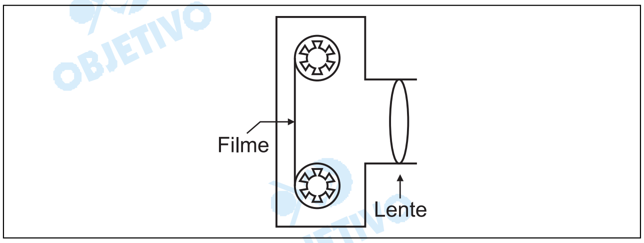
$$\boxed{Q = 540\ kJ}$$

Respostas: *a) 330 kJ/kg*

b) 540 kJ

18

Uma câmara fotográfica rudimentar utiliza uma lente convergente de distância focal f = 50 mm para focalizar e projetar a imagem de um objeto sobre o filme. A distância da lente ao filme é p' = 52 mm. A figura mostra o esboço dessa câmara.



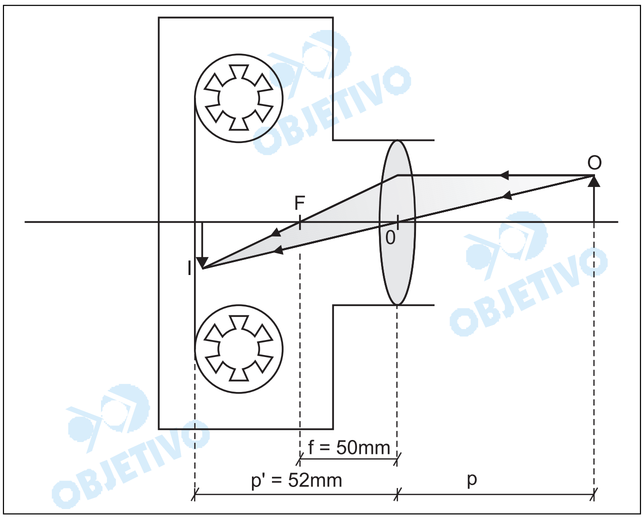
Para se obter uma boa foto, é necessário que a imagem do objeto seja formada exatamente sobre o filme e o seu tamanho não deve exceder a área sensível do filme. Assim:

a) Calcule a posição que o objeto deve ficar em relação à lente.

b) Sabendo-se que a altura máxima da imagem não pode exceder a 36,0 mm, determine a altura máxima do objeto para que ele seja fotografado em toda a sua extensão.

Resolução

A formação da imagem sobre o filme está esquematizada (fora de escala) abaixo.



a) ***Equação de Gauss**:*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{p} + \frac{1}{52} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{50} - \frac{1}{52}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{52-50}{50 \,.\, 52} \Rightarrow p = \frac{50 \,.\, 52}{2} \; (mm)$$

$$\boxed{p = 1300mm = 1{,}3m}$$

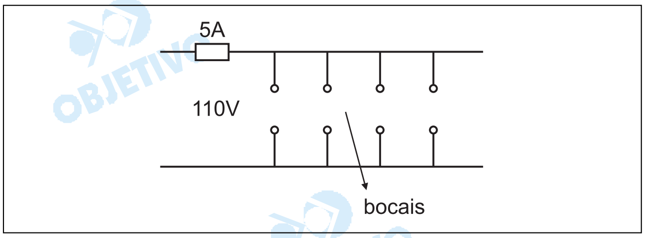
b) $$\frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{36{,}0}{y} = -\frac{52}{1300}$$

$$y = -900mm \Rightarrow \boxed{h = 900mm = 90cm}$$

Respostas: *a) 1,3m*
b) 90cm

19

Uma luminária, com vários bocais para conexão de lâmpadas, possui um fusível de 5 A para proteção da rede elétrica alimentada com uma tensão de 110 V, como ilustrado na figura.



Calcule

a) a potência máxima que pode ser dissipada na luminária.

b) o número máximo de lâmpadas de 150 W que podem ser conectadas na luminária.

Resolução

a) *Sendo de 5A a intensidade máxima de corrente elétrica suportada pelo fusível e de 110V a tensão elétrica da rede, temos:*

$P_{máx} = i_{máx} \cdot U$

$P_{máx} = 5 \cdot 110 \text{ (W)}$

$\boxed{P_{máx} = 550W}$

b) *O número máximo de lâmpadas pode ser calculado por:*

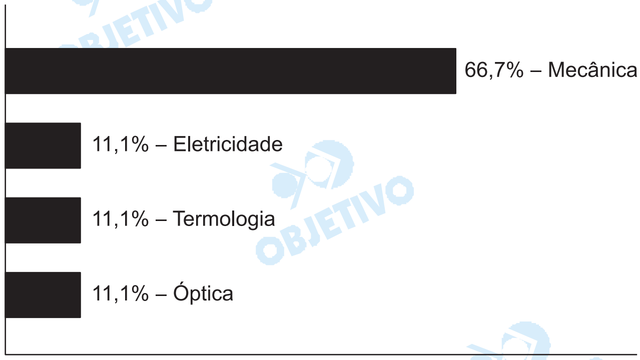
$$n = \frac{P_{máx}}{P} = \frac{550}{150}$$

$n \cong 3,7 \Rightarrow \boxed{n_{máx} = 3 \text{ lâmpadas}}$

***Respostas**: a) 550W*
b) 3 lâmpadas

Física

A prova de Física apresentou questões simples de nível médio, bem distribuídas e tradicionais. Lamentamos apenas que na questão 13 apareceu um fator 1,5 multiplicando a força gravitacional sem nenhuma explicação para o candidato.



20

A Bolívia é um grande produtor de gás natural (metano) e celebrou com o Brasil um acordo para a utilização deste importante recurso energético. Para seu transporte até os centros consumidores, há um gasoduto ligando os dois países, já tendo chegado ao interior do Estado de São Paulo.

a) Escreva a fórmula mínima e calcule a massa molar para o metano. Dadas as massas molares, em $g \cdot mol^{-1}$: C = 12 e H = 1.

b) Escreva a equação para a reação de combustão do metano e o nome dos produtos formados.

Resolução

a) A fórmula mínima coincide com a fórmula molecular do metano (CH_4).

CH_4: fórmula mínima

$M = (1 . 12 + 4 . 1)$ g/mol

$M = 16$g/mol

b) A equação química do processo é:

$$\underset{}{CH_4(g)} + 2O_2(g) \rightarrow \underset{\text{gás carbônico (dióxido de carbono)}}{CO_2(g)} + \underset{\text{água}}{2H_2O}$$

Considere os seguintes compostos, todos contendo cloro:
$BaCl_2$; CH_3Cl; CCl_4 e $NaCl$.

Sabendo que o sódio pertence ao grupo 1, o bário ao grupo 2, o carbono ao grupo 14, o cloro ao grupo 17 da Tabela Periódica e que o hidrogênio tem número atômico igual a 1:

a) transcreva a fórmula química dos compostos iônicos para o caderno de respostas e identifique-os, fornecendo seus nomes.

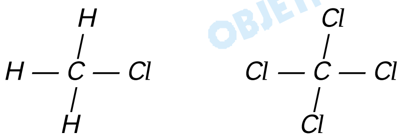
b) apresente a fórmula estrutural para os compostos covalentes e identifique a molécula que apresenta momento dipolar resultante diferente de zero (molécula polar).

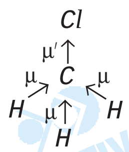
Resolução

a) *Um composto iônico é formado por um metal unido a um não-metal ou hidrogênio.*
$BaCl_2$: cloreto de bário
$NaCl$: cloreto de sódio

Metais citados: sódio (grupo 1) e bário (grupo 2)
Não-metais citados: carbono (grupo 14) e cloro (grupo 17)

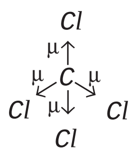
b) *Carbono é tetravalente (grupo 14)*
Cloro é monovalente (grupo 17)
Hidrogênio é monovalente





$\mu_{total} \neq 0$

Cloreto de metila (polar)



$\mu_{total} = 0$

Tetracloreto de carbono (apolar)

22

A soda cáustica (hidróxido de sódio) é um dos produtos utilizados na formulação dos limpa-fornos e desentupidores de pias domésticas, tratando-se de uma base forte. O ácido muriático (ácido clorídrico com concentração de 12 mol·L^{-1}) é muito utilizado na limpeza de pisos e é um ácido forte. Ambos devem ser manuseados com cautela, pois podem causar queimaduras graves se entrarem em contato com a pele.

a) Escreva a equação química para a neutralização do hidróxido de sódio com o ácido clorídrico, ambos em solução aquosa.

b) Dadas as massas molares, em g·mol–1: H = 1; O = 16 e Na = 23, calcule o volume de ácido muriático necessário para a neutralização de 2L de solução de hidróxido de sódio com concentração de 120 g·L^{-1}. Apresente seus cálculos.

Resolução

a) *A equação química que representa a reação de neutralização é:*

$NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_2O(l)$

Equação iônica: $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$

b) *Cálculo da massa de NaOH presente em 2L de solução:*

Volume (L) ——— massa (g)
1 ——— 120
2 ——— x
x = 240g de NaOH

Cálculo da quantidade, em mol, de HCl:

Massa de NaOH(g) ——— mols de HCl
40 ——— 1
240 ——— y
y = 6 mol de HCl

Cálculo do volume de solução de HCl:

Volume (L) ——— mol
1 ——— 12
z ——— 6
z = 0,5L

23

Há décadas são conhecidos os efeitos dos CFCs, ou freons, na destruição da camada de ozônio da atmosfera terrestre. Acredita-se que a diminuição da quantidade de O_3 na atmosfera seja responsável pelo aumento na incidência de câncer de pele, pois a radiação ultravioleta não mais é bloqueada com a mesma eficiência. A ação destes gases, como o CF_2Cl_2, inicia-se com a produção de átomos de cloro livres ($Cl\bullet$), pela interação das moléculas do gás com a radiação solar, seguindo-se as reações:

1ª etapa: $O_3 + Cl\bullet \rightarrow O_2 + ClO\bullet$

2ª etapa: $ClO\bullet + O_3 \rightarrow 2O_2 + Cl\bullet$

a) Escreva a equação global para esta reação e identifique o produto formado.

b) Considere a afirmação: "O mecanismo proposto para a destruição da camada de ozônio equivale a uma reação catalisada". Justifique esta afirmação e identifique o catalisador.

Resolução

a) *Somando as etapas, temos:*

$$1^a)\ O_3 + \cancel{Cl\bullet} \longrightarrow O_2 + \cancel{ClO\bullet}$$

$$2^a)\ \cancel{ClO\bullet} + O_3 \rightarrow 2O_2 + \cancel{Cl\bullet}$$

$$2O_3 \longrightarrow \underbrace{3O_2}_{\text{gás oxigênio}}$$

b) *O catalisador é $Cl\bullet$ (cloro livre), pois é consumido na 1ª etapa e regenerado na 2ª etapa do processo.*

24

Pilhas recarregáveis, também denominadas células secundárias, substituem, com vantagens para o meio ambiente, as pilhas comuns descartáveis. Um exemplo comercial são as pilhas de níquel-cádmio (Nicad), nas quais, para a produção de energia elétrica, ocorrem os seguintes processos:

I. O cádmio metálico, imerso em uma pasta básica contendo íons OH^- (aq), reage produzindo hidróxido de cádmio (II), um composto insolúvel.

II. O hidróxido de níquel (III) reage produzindo hidróxido de níquel (II), ambos insolúveis e imersos numa pasta básica contendo íons OH^- (aq).

a) Escreva a semi-reação que ocorre no ânodo de uma pilha de Nicad.

b) Uma TV portátil funciona adequadamente quando as pilhas instaladas fornecem uma diferença de potencial entre 12,0 e 14,0 V. Sabendo-se que E_0 (Cd^{2+}, Cd) = –0,81V e E_0 (Ni^{3+}, Ni^{2+}) = +0,49V, nas condições de operação descritas, calcule a diferença de potencial em uma pilha de níquel-cádmio e a quantidade de pilhas, associadas em série, necessárias para que a TV funcione adequadamente.

Resolução

a) No ânodo da pilha de Nicad, ocorre a oxidação do cádmio:

$$Cd^0(s) + 2OH^-(aq) \rightarrow Cd^{2+}(OH)_2(s) + 2e^-$$

b) • Cálculo da diferença de potencial em uma pilha de níquel-cádmio:

$$\boxed{\Delta V = E_{RED}\ Ni^{3+} - E_{RED}\ Cd^{2+}}$$

$$\Delta V = 0{,}49V - (-0{,}81V)$$

$$\boxed{\Delta V = +\ 1{,}30V}$$

Resolução alternativa:

$$Cd^0(s) + \cancel{2OH^-(aq)} \rightarrow Cd^{2+}(OH)_2(s) + \cancel{2e^-} \ + 0{,}81\ V$$

$$2\ Ni^{3+}(OH)_3(s) + \cancel{2e^-} \rightarrow 2Ni^{2+}(OH)_2(s) + \cancel{2OH^-(aq)} + 0{,}49V$$

$$Cd(s) + 2\ Ni(OH)_3(s) \rightarrow 2Ni(OH)_2(s) + Cd(OH)_2(s) + 1{,}30V$$

• Como um aparelho de televisão portátil funciona adequadamente quando as pilhas instaladas fornecem uma diferença de potencial entre 12,0 e 14,0 V, serão necessárias 10 pilhas associadas em série:

$$\boxed{1{,}30\ V \times 10 = 13{,}0\ V}$$

25

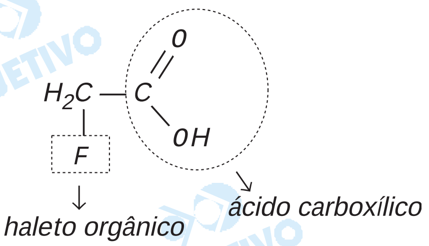
“Substância proibida no Brasil matou animais no zoológico de São Paulo”. Esta notícia, estampada nos jornais brasileiros no início de 2004, se refere à morte dos animais intoxicados pelo monofluoroacetato de sódio, um derivado do ácido monofluoroacético (ou ácido monofluoroetanóico), que age no organismo dos mamíferos pela inibição da enzima aconitase, bloqueando o ciclo de Krebs e levando-os à morte.

a) Escreva a fórmula estrutural do ácido monofluoroetanóico e identifique, indicando com setas e fornecendo seus nomes, duas funções orgânicas presentes neste composto.

b) Quanto maior a eletronegatividade do grupo ligado ao carbono 2 dos derivados do ácido acético, maior a constante de dissociação do ácido (efeito indutivo). Considerando os ácidos monocloroacético, monofluoroacético e o próprio ácido acético, coloque-os em ordem crescente de acidez.

Resolução

a) A fórmula estrutural do ácido monofluoroetanóico é:

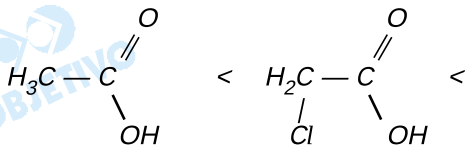


b) Quanto maior a eletronegatividade do grupo ligado ao carbono 2 dos derivados do ácido acético, maior o efeito indutivo e maior a acidez.

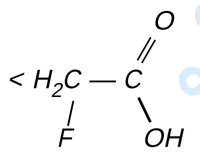
- ***Ordem crescente de eletronegatividade:***
  H < Cl < F

- ***Ordem crescente de acidez:***

ácido acético *ácido monocloroacético*



ácido monofluoroacético



Comentário de Química

Parabéns à banca examinadora, que conseguiu fazer uma prova simples, clássica e sem complicações.